数学机械化丛书　　4

多项式系统的实根分离算法及其应用

陆征一　何　碧　罗　勇　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书利用吴方法、一元多项式实根分离算法及多项式的单调性分解，提出了一般多元多项式组实零点的区间分离算法. 将此算法应用于几类典型的微分方程定型性质的研究得到了一些新的结果：一类单调系统的全局稳定性，Lienard 系统的小扰动极限环构造，三次系统的弱中心阶数的判定，以及高维系统的极限环构造.

本书适用于大学高年级本科生、研究生及相关的科技工作者使用.

图书在版编目（CIP）数据

多项式系统的实根分离算法及其应用/陆征一等著.
北京：科学出版社，2004
(数学机械化丛书；4)
ISBN 7-03-012427-8

Ⅰ. 多… Ⅱ. 陆… Ⅲ. 多项式—算法 Ⅳ. O174.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 106947 号

责任编辑：吕 虹 范庆奎／责任校对：朱光光
责任印制：钱玉芬 ／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编辑：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004 年 5 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004 年 5 月第一次印刷 印张：10
印数：1—2 500 字数：200 000

定价：30.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

《数学机械化丛书》编委会

主　编：吴文俊

副主编：高小山

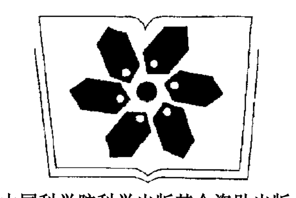
编　委：（以姓氏笔画为序）

万哲先　王东明　石　赫　冯果忱

刘卓军　齐东旭　李文林　李洪波

杨　路　吴　可　吴文达　张景中

陈永川　周咸青　胡国定



中国科学院科学出版基金资助出版

《数学机械化丛书》获国家基础研究发展规划项目“数学机械化与自动推理平台”与“数学机械化应用推广专用经费”资助

《数学机械化丛书》前言 ①

十六七世纪以来，人类历史上经历了一场史无前例的技术革命，出现了各种类型的机器，取代各种形式的体力劳动，使人类进入一个新时代．几百年后的今天，电子计算机已可开始有条件地代替一部分特定的脑力劳动，因而人类已面临另一场更宏伟的技术革命，处在又一个新时代的前夕．数学是一种典型的脑力劳动，它在这一场新的技术革命中，无疑将扮演一个重要的角色．为了了解数学在当前这场革命中所扮演的角色，就应对机器的作用，以及作为数学的脑力劳动的方式，进行一定的分析．

1．什么是数学的机械化

不论是机器代替体力劳动，或是计算机代替某种脑力劳动，其所以成为可能，关键在于所需代替的劳动已经“机械化”，也就是说已实现了刻板化或规格化．正因为割麦、刈草、纺纱、织布的动作已经是机械化刻板化了的，因而可据以造出割麦机、刈草机、纺纱机、织布机来．也正因为加减乘除开方等运算这一类脑力劳动，几千年来就已经是机械地刻板地进行的，才有可能使得 17 世纪的法国数学家巴斯喀，利用齿轮传动造出了第一台机械计算机 —— 加法机，并由莱布尼茨改进成为也能进行乘法的机器．数学问题的机械化，就要求在运算或证明过程中，每前进一步之后，都有一个确定的、必须选择的下一步，这样沿着一条有规律的、刻板的道路，一直达到结论．

在中小学数学的范围里，就有着不少已经机械化了的课题．除了四则、开方等运算外，解线性联立方程组就是一个很好的例子．在中学用的数学课本中，往往介绍解线性方程组的各种“消去法”，其求解过程是一个按一定程序进行的计算过程，也就是一种机械的、刻板的过程．根据这一过程编成程序，由电子计算机付诸实施，就可以不仅机器化而且达到自动化，在几分钟甚至几秒钟之内求出一个未知数多至上百个的线性方程组的解答来，这在手工计算几乎是不可能的．如果用手工计算，即使是解只有三四个未知数的方程组，也将是繁琐而令人厌烦的．现代化的国防、经济建设中，大量出现的例如网络一类的问题，

① 20 世纪七八十年代之交，我尝试用计算机证明几何定理取得成功，由此并提出了数学机械化的设想．先后在一些通俗报告与写作中，解释数学机械化的意义与前景，例如 1978 年发表于《自然辩证法通讯》的“数学机械化问题”以及 1980 年发表于《百科知识》的“数学的机械化”．二文都重载于 1995 年由山东教育出版社出版的《吴文俊论数学机械化》一书．经过二十多年众多学者的努力，数学机械化在各个方面都取得了丰富多彩的成就，并已出版了多种专著，汇集成现在的数学机械化丛书．现据 1980 年的《百科知识》的“数学的机械化”一文，稍加修改并作增补，以代丛书前言．

往往可归结为求解很多未知数的线性方程组. 这使得已经机械化了的线性方程解法在四个现代化中起着一种重要作用.

即使是不专门研究数学的人们, 也大都知道, 数学的脑力劳动有两种主要形式: 数值计算与定理证明 (或许还应包括公式推导, 但这终究是次要的). 著名的数理逻辑学家美国洛克菲勒大学教授王浩先生在一篇 "向机械化数学前进" 的有名文章中, 曾列举了这两种数学脑力劳动的若干不同之点. 我们可以简略而概括地把它们对比一下:

计算	证明
易	难
繁	简
刻板	灵活
枯燥	美妙

计算, 如已经提到过的加减乘除开方与解线性方程组, 其所以虽繁而易, 根本原因正在于它已经机械化. 而证明的巧而难, 是大家都深有体会的, 其根本原因也正在于它并没有机械化. 例如, 我们在中学初等几何定理的证明中, 就经常要依靠诸如直观、洞察、经验以及其他一些模糊不清的原则, 去寻找捷径.

2. 从证明的机械化到机器证明

一个值得提出的问题是: 定理的证明是不是也能像计算那样机械化, 因而把巧而难的证明, 化为计算那样虽繁而易的劳动呢? 事实上, 这一证明机械化的设想, 并不始自今日, 它早就为 17 世纪时的大哲学家、大思想家和大数学家笛卡儿和莱布尼茨所具有. 只是直到 19 世纪末, 希尔伯特 (德国数学家, 1862~1943) 等创立并发展了数理逻辑以来, 这一设想才有了明确的数学形式. 又由于 20 世纪 40 年代电子计算机的出现, 才使这一设想的实现有了现实可能性.

从 20 世纪二三十年代以来, 数理逻辑学家们对于定理证明机械化的可能性进行了大量的理论探讨, 他们的结果大都是否定的. 例如哥德尔 (Gödel) 等的一条著名定理就说, 即使看来最简单的初等数论这一范围, 它的定理证明的机械化也是不可能的. 另一方面, 1950 年波兰数学家塔斯基 (Tarski) 则证明了初等几何 (以及初等代数) 这一范围的定理证明, 却是可以机械化的. 只是塔斯基的结果近于例外, 在初等几何及初等代数以外的大量结果都是反面的, 即机械化是不可能的. 1956 年以来美国开始了利用电子计算机做证明定理的尝试. 1959 年王浩先生设计了一个机械化方法, 用计算机证明了罗素等著的《数学原理》这一经典著作中的几百条定理, 只用了 9 分钟, 在数学与数理逻辑学界引

起了轰动. 有一时机器证明的前景似乎非常乐观. 例如 1958 年时就有人曾经预测：在 10 年之内计算机将发现并证明一个重要的数学新定理. 还有人认为，如果这样，则不仅许多著名哲学家与数学家如庞阿诺、怀特海、罗素、希尔伯特以及杜灵等人的梦想得以实现，而且计算将成为科学的皇后，人类的主人！

然而，事情的发展却并不如预期那样美好. 尽管在 1976 年时，美国的哈肯等人，在高速计算机上用了 1200 小时的计算时间，解决了数学家们 100 多年来所未能解决的一个著名难题 —— 四色问题，因此而轰动一时，但是，这只能说明计算机作为定理证明的辅助工具有着巨大潜力，还不能认为这样的证明就是一种真正的机器证明. 用王浩先生的说法，哈肯等关于四色定理的证明是一种使用计算机的特例机证，它只适用于四色这一特殊的定理，这与所谓基础机器证明之能适用于一类定理者有别. 后者才真正体现了机械化定理证明，进而实现机器证明的实质. 另一面，在真正的机械化证明方面，虽然塔斯基在理论上早已证明了初等几何的定理证明是能机械化的，还提出了据以造判定机也即是证明机的设想，但实际上他的机械化方法非常繁，繁到不可收拾，因而远远不是切实可行的. 1976 年时，美国做了许多在计算机上证明定理的实验，在泰斯基的初等几何范围内，用计算机所能证明的只是一些近于同义反复的“儿戏式”的“定理”. 因此，有些专家曾经发出过这样悲观的论调：如果专依靠机器，则再过 100 年也未必能证明出多少有意义的新定理来.

3. 一条切实可行的道路

1976 年冬，我们开始了定理证明机械化的研究. 1977 年春取得了初步成果，证明初等几何主要一类定理的证明可以机械化. 在理论上说来，我们的结果已包括在塔斯基的定理之中. 但与塔斯基的结果不同，我们的机械化方法是切实可行的，即使用手算，依据机械化的方法逐步进行，虽然繁复，也可以证明一些艰深的定理.

我们的方法主要分两步，第一步是引进坐标，然后把需证定理中的假设与终结部分都用坐标间的代数关系来表示. 我们所考虑的定理局限于这些代数关系都是多项式等式关系的范围，例如平行、垂直、相交、距离等关系都是如此. 这一步可以叫做几何的代数化. 第二步是通过代表假设的多项式关系把终结多项式中的坐标逐个消去，如果消去的结果为零，即表明定理正确，否则再作进一步检查. 这一步完全是代数的，即用多项式的消元法来验证.

上述两步都可以机械与刻板地进行. 根据我们的机械化方法编成程序，以在计算机上实现机器证明，并无实质上的困难. 事实上数学所某些同志以及国外的王浩先生都曾在计算机上试行过. 我们自己也曾在国产的长城 203 台式机上证明了像西姆森线那样不算简单的定理. 1978 年初我们又证明了初等微分

几何中主要的一类定理证明也可以机械化. 而且这种机械化方法也是切实可行的, 并据此用手算证明了不算简单的一些定理.

从我们的工作中可以看出, 定理的机械化证明, 往往极度繁复, 与通常既简且妙的证明形成对照, 这种以量的复杂来换取质的困难, 正是利用计算机所需要的.

在电子计算机如此发展的今天, 把我们的机械化方法在计算机上实现不仅不难, 而且有一台微型的台式机也就够了. 就像我们曾经使用过的长城 203, 它的存数最多只能到 234 个 10 进位的 12 位数, 就已能用以证明西姆逊线那样的定理. 随着超大规模集成电路与其他技术的出现与改进, 微型机将愈来愈小型化而内存却愈来愈大, 功能愈来愈多, 自动化的程度也愈来愈高. 进入 21 世纪以后, 这一类方便的小型机器将为广大群众普遍使用. 它们不仅将成为证明一些不很简单的定理的武器, 而且还可用以发现并证明一些艰深的定理, 而这种定理的发现与证明, 在数学研究手工业式的过去, 将是不可想像的. 这里我们应该着重指出, 我们并不鼓励以后人们将使用计算机来证明甚至发现一些有趣的几何定理. 恰恰相反, 我们希望人们不再从事这种虽然有趣却即是对数学甚至几何学本身也已意义不大的工作, 而把自己从这种工作中解放出来, 把自己的聪明才智与创造能力贯注到更有意义的脑力劳动上去.

还应该指出, 目前我们所能证明的定理, 局限于已经发现的机械化方法的范围, 例如初等几何与初等微分几何之内. 而如何超出与扩大这些机械化的范围, 则是今后需要探索的长期的理论性工作.

4. 历史的启示与中国古代数学

我们发现几何定理证明的机械化方法是在 1976 至 1977 年之间. 约在两年之后我们发现早在 1899 年出版的希尔伯特的经典名著《几何基础》中, 就有着一条真正的正面的机械化定理: 初等几何中只涉及从属与平行关系的定理证明可以机械化. 当然, 原来的叙述并不是以机械化的语言来表达的, 也许就连希尔伯特本人也并没有对这一定理的机械化意义有明确的认识, 自然更不见得有其他人提到过这一定理的机械化内容. 希尔伯特是以公理化的典范而著称于世的, 但我认为, 该书更重要处, 是在于提供了一条从公理化出发, 通过代数化以到达机械化的道路. 自然, 处于希尔伯特以及其后数学的一张纸一支笔的手工作业时代里, 公理化的思想与方法得到足够的重视与充分的发展, 而机械化的方向与意义受到数学家的忽视是完全可以理解的. 但在电子计算机已日益普及, 因而繁琐而重复的计算已成为不足道的事情了, 机械化的思想应比公理化思想受到更大重视, 似乎是合乎实际的.

其次应该着重指出, 我们从事机械化定理证明工作获得成果之前, 对塔斯

基的已有工作并无接触，更没有想到希尔伯特的《几何基础》会与机械化有任何关系. 我们是在中国古代数学的启发之下提出问题并想出解决办法来的.

说起来道理也很简单：中国的古代数学基本上是一种机械化的数学. 四则运算与开方的机械化算法由来已久. 汉初完成的《九章算术》中，对开平、立方与解线性联立方程组的机械化过程，都有详细说明. 宋代更发展到高次代数方程求数值解的机械化算法.

总之各个数学领域都有定理证明的问题，并不限于初等几何或微分几何. 这种定理证明肇始于古希腊的欧几里得传统，现已成为近代纯粹数学或核心数学的主流. 与之相异，中国的古代学者重视的是各种问题特别是来自实际要求的具体问题的解决. 各种问题的已知数据与要求的数据之间，很自然地往往以多项式方程的形式出现. 因之，多项式方程的求解问题，也就自然成为中国古代数学家研究的中心问题. 从秦汉以来，所研究的方程由简到繁，不断有所前进，有所创新. 到宋元时期，更出现了一个思想与方法的飞跃：天元术的创立.

“天元术”到元代朱世杰时又发展成四元术，所引入的天元、地元、人元、物元实际上相当于近代的未知元或未知数. 将这些未知元作为通常的已知数那样加减乘除，就可得到与近代多项式与有理函数相当的概念与相应的表达形式与运算法则. 一些几何性质与关系很容易转化成这种多项式或有理函数的形式及其关系. 这使得过去依题意列方程这种无法可循需要高度技巧的工作从此变成轻而易举. 朱世杰 1303 年的《四元玉鑑》又给出了解任意多至四个未知元的多项式方程组的方法. 这里限于 4 个未知元只是由于所使用的计算工具 (算筹和算板) 的限制. 实质上他解方程的思想路线与方法完全可以适用于任意多的未知元.

不问可知，在当时的具体条件下，朱的方法有许多缺陷. 首先，当时还没有复数的概念，因之朱往往限于求出 (正) 实值. 这无可厚非，甚至在 17 世纪 Descartes 的时代也还往往如此. 但此外朱在方法上也未臻完善. 尽管如此，朱的思想路线与方法步骤是完全正确的，我们在 20 世纪 70 年代之末，遵循朱的思想与方法的基本实质，采用美国数学家 J. F. Ritt 在 1935, 1950 年关于微分方程代数研究书中所提供的某些技术，得出了解任意复多项式方程组的一般算法，并给出了全部复数解的具体表达形式. 此后又得出了实系数时求实解的方法，为重要的优化问题提供了一个具体的方法.

由于多种问题往往自然导致多项式方程组的求解，因而我们解方程的一般方法可被应用于形形式式的问题. 这些问题可以来自数学自身，也可以来自其他自然科学或工程技术. 在本丛书的第一本书，吴文俊的《数学机械化》一书中，可以看到这些应用的实例. 在工程技术方面的应用，在本丛书中已有高小山的《几何自动作图与智能 CAD 》与陈发来和冯玉瑜的《代数曲面拼接》两

本专著. 上述解多项式方程组的一般方法已推广至代微分方程的情形. 许多应用以及相应论著正在酝酿之中.

5. 未来的技术革命与时代的使命

宋元时代天元术与四元术的创造, 把许多问题特别是几何问题转化成代数方程与方程组的求解问题. 这一方法用于几何可称为几何的代数化. 12 世纪的刘益将新法与“古法”比较, 称“省功数倍”, 这可以说是减轻脑力劳动使数学走上机械化的道路的一项伟大的成就.

与天元术的创造相伴,宋元时代的数学又引进了相当于现代多项式的概念, 建立了多项式的运算法则和消元法的有关代数工具, 使几何代数化的方法得到了有系统的发展, 具见于宋元时代幸以保存至今的杨辉、李冶、朱世杰的许多著作之中. 几何的代数化是解析几何的前身, 这些创造使我国古代数学达到了又一个高峰. 可以说, 当时我国已到达了解析几何与微积分的大门, 具备了创立这些数学关键领域的条件, 但是各种原因使我们数学的雄伟步伐就在这些大门之前停顿下来. 几百年的停顿, 使我们这个古代的数学大国在近代变成了数学上的纯粹入超国家. 然而, 我国古代机械化与代数化的光辉思想和伟大成就是无法磨灭的. 本人关于数学机械化的研究工作, 就是在这些思想与成就启发之下的产物, 它是我国自《九章算术》以迄宋元时期数学的直接继承.

恩格斯曾经指出, 枪炮的出现消除了体力上的差别, 使中世纪的骑士阶级从此销声匿迹, 为欧洲从封建时代进入到资本主义时代准备了条件. 近年有些计算机科学家指出, 个人用计算机的出现, 其冲击作用可与枪炮的出现相比. 枪炮使人们在体力上难分强弱, 而个人用计算机将使人们在智力上难分聪明愚鲁. 又有人对数学的未来提出看法, 认为计算机的出现, 将使数学现在一张纸一支笔的方法, 在历史的长河中, 无异于石器时代的手工方法. 今天的数学家们, 不得不面对计算机的挑战, 但是, 也不必妄自菲薄. 大量繁复的事情交给计算机去做了, 人脑将仍然从事富有创造性的劳动.

我国在体力劳动的机械化革命中曾经掉队, 以致造成现在的落后状态. 在当前新的一场脑力劳动的机械化革命中, 我们不能重蹈覆辙. 数学是一种典型的脑力劳动, 它的机械化有着许多其他类型脑力劳动所不及的有利条件. 它的发扬与实现对我国的数学家是一种时代的使命. 我国古代数学的光辉, 鼓舞着我们为实现数学的机械化, 在某种意义上也可以说是真正的现代化而勇往直前.

吴文俊

2002 年 6 月于北京

前　言

多元多项式的实根分离 (mrealroot) 算法及其相关应用的思想于 1999 年提出，并且初步编制了 Maple 下的相关程序．同年 10 月，在中国科学院成都计算机应用研究所举行的第一届数学机械化高级讨论班上以及 11 月在四川大学举办的全国第三次生物动力系统研讨会上分别做了报告．时间仓促，取几位作者名称首字母，称为 HLLP 算法．

随后，我们进一步应用该算法于大量的动力系统定性分析问题，统一处理了 10 余年来文献中关于小扰动极限环的构造，证实了算法的有效性． 2000 年 5 月，在国家重点基础规划项目 (“ 973 ” 项目) 年度报告会上，以及 7 月，应马知恩教授邀请，在西安交大举行的全国研究生暑期应用数学讲习班上，报告了我们的工作进展．同年 10~11 月，应竹内康博教授邀请，由日本数学会资助，在日本静冈大学报告了本书的内容． 2001 年 2 月，应杨路教授邀请，在中国科学院成都计算机应用研究所再次详细报告了我们的内容．我们应用 mrealroot 算法在高维 Lotka-Volterra 系统和 Liénard 系统获得的新结果已经引起国内外同行的广泛兴趣．

希望本书的出版能够提供给同行们关于实根分离算法以及在微分方程定性分析应用方面的一个参考．并希望能起到抛砖引玉的作用，对读者有所启发．

致　谢:

本书的初稿完成于 2001 年 2 月．其后，我们将预印本赠送国内数十位同行专家．值本书出版之际，对给予我们支持和帮助的各位专家表示真诚的谢意．

本书的写作及完成得到了国家九五攀登项目、国家“ 973 ” 项目、数学机械化应用推广专项经费、国家自然科学基金和浙江省自然科学基金的资助．

感谢吴文俊先生和高小山首席科学家将本书列入《数学机械化丛书》．

陆征一　何　碧　罗　勇

2004 年 2 月

目　录

第一章　引　论 1
1.1　实根分离算法 1
1.2　平面系统的小扰动极限环 3
1.3　弱中心及阶数 4
1.4　高维系统的极限环 5
第二章　基本理论 6
2.1　多项式及理想 6
2.2　Gröbner 基 16
2.3　吴方法 24
2.4　结式 28
第三章　实根分离算法 34
3.1　一元多项式的实根分离算法 34
3.2　多元多项式的实根分离算法 37
3.3　三角化多项式组的不可约分解算法 45
3.4　例　子 51
第四章　单调系统 56
4.1　单调性定理 56
4.2　共存系统的永久性 59
4.3　竞争系统的永久性 61
4.4　竞争系统的全局稳定性 62
4.5　附　录 63
第五章　三次系统 67
5.1　焦点量的计算 67
5.2　小扰动极限环的构造 72
5.3　Kolmogorov 系统 75
5.4　Kukles 系统 79
5.5　一般三次系统 84
第六章　Liénard 系统 89
6.1　基本结果 89
6.2　对 $\hat{H}(n,m)$ 的估计 91
6.3　小扰动极限环的构造 99

第七章 平面微分多项式系统的中心 104
7.1 中心的基本概念和性质 104
7.2 三次系统的等时中心 108
7.3 三次系统弱中心的阶数 113
第八章 高维系统的小扰动极限环 119
8.1 分类定理 119
8.2 中心流形构造 123
8.3 三维系统极限环的构造 127
8.4 具有三个极限环的三维竞争系统 133
8.5 四维复制动力系统的极限环构造 135
8.6 三维捕食系统极限环的构造 139
参考文献 142

第一章　引　论

多项式实根分离 (realroot) 算法及其推广 (mrealroot) 不仅具有理论上的重要性，在大量具体问题，包括实根分布、小扰动极限环个数、非等时中心的阶数以及高维系统极限环构造等都有广泛的应用.

1.1　实根分离算法

多项式方程组的求解 (符号和数值) 不仅具有很强的理论意义，同时也有广泛的应用前景. 多项式组求解算法及性质的判定准则包括 Gröbner 基方法，吴方法等. 数值计算的方法包括牛顿算法、同伦算法、特征值方法等. 而与上述两种方法均有不同的关于常系数一元多项式的实根分布 (realroot command) 的算法以区间 (端点为有理数) 形式给出孤立实解的存在和位置估计 (Maple). 利用 Sturm 定理， Descarts 符号准则判别实根位置的算法以及计算时间分析已有较为完整的结果.

此算法根据根的绝对值的上、下界估计，利用 Role 定理， Sturm 序列的符号判别法则，以一系列区间的形式给出实根. 每一个以有理数为端点的区间正好包含一个实根. 在此算法的所有过程中所用到的均为有理数，所以整个计算是无误差的. 本书中，我们要强调的是这种实根分离算法的有效性，即不仅可以确定实根的存在及位置，而且 (特别地) 可以利用所求得的实根 (以区间形式表示) 进行进一步的论证. 我们强调实根分离算法的有效性以及可应用是因为多项式方程组的根作为其系数的函数具有相当的不稳定性. 下面的例子由 Wilkinson 于 1959 年给出，它说明了这种不稳定性.

例 1.1.1　*考虑如下的多项式*

$$W(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+20) = x^{20} + 210x^{19} + \cdots + 20!.$$

显然此多项式正好有 20 个实根 $-1, -2, \cdots, -20$.
现在考虑 $W(x)$ 的一个非常小的扰动

$$\hat{W}(x) = W(x) + 10^{-9}x^{19} = x^{20} + (210 + 10^{-9})x^{19} + \cdots + 20!,$$

其中 10^{-9} 只是在小数点后第九位改变了 x^{19} 的系数. 直观上，因为 $\hat{W}(x)$ 与 $W(x)$ 是如此的接近，$\hat{W}(x)$ 也应该具有 20 个实根. 但事实并非如此，$\hat{W}(x)$ 仅有 12 个实根. 这可由 Sturm 定理直接判断，也可以利用 Maple 的 realroot 命

令验证 (此时 $\hat{W}(x)$ 无重根，指定分离区间的长度为 1/10):

$$\left[\left[-1,-\frac{15}{16}\right],\ \left[-\frac{33}{16},-2\right],\ \left[-3,-\frac{47}{16}\right],\ \left[-\frac{65}{16},-4\right],\right.$$

$$\left[-5,-\frac{79}{16}\right],\ \left[-\frac{97}{16},-6\right],\ \left[-7,-\frac{111}{16}\right],\ \left[-\frac{129}{16},-8\right],$$

$$\left.\left[-9,-\frac{143}{16}\right],\left[-\frac{161}{16},-10\right],\left[-11,-\frac{175}{16}\right],\left[-\frac{321}{16},-20\right]\right].$$

因为 realroot 算法是一个完全算法, 每个分离区间内含且仅含一个实根, 故 $\hat{W}(x)$ 仅有 12 个实根．通过完全求解 $\hat{W}(x)=0$ 可以得到另外 4 对复根，其虚部并不是非常小，它们介于 0.1 至 0.89 之间．这说明在求解系数为近似值的多项式实根时，必须注意根的分布可能受系数的取值精度影响.

一个类似的简单例子为如下方程求解.

例 1.1.2

$$\begin{aligned} x^2+2x+3+y^5-y&=0,\\ y^6-y^2+2y&=0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

显然，第二个方程除平凡实解 $y=0$ 以外，在 $[-2,-1]$ 中还有一实根．取其 10 位有效数字的近似值： $y=-1.267168305$, 将其代入系统 (1.1) 的第一个方程, 有

$$x^2+2x+0.999999995=0.$$

其有解 $x_1=-1.000070711$, $x_2=-0.9999292893$ ，即 (1.1) 有两个相异实根.

现在取 8 位有效数字的近似值： $y=-1.2671683$, 代入第一个方程有

$$x^2+2x+1.000000054=0.$$

此方程有一对共轭的复根 $x_1=-1+0.00023238\mathrm{i}$, $x_2=-1-0.00023238\mathrm{i}$. 这说明，在某些情况下，不同的近似程度导致根具有完全不同的性态．实际上，第二个方程的非零实根满足 $y^5-y=-2$, 代入第一方程有

$$x^2+2x+1=0.$$

所以，该方程精确解应为重根 -1. 以上近似计算说明在重根情形，数值求解的脆弱性.

例 1.1.1 中， $\hat{W}(x)$ 的 12 个实根是通过实根分离算法得到的．一元多项式的实根分离算法以孤立区间的形式保证了其实根在某种意义上的准确性．相对于一元多项式实根分布的算法和实现，一个自然的问题是：

问题 1.1.3 能否推广 Maple 中的 realroot 算法，使其能确定多元多项式实根的存在性和位置估计？

本书的目的是将关于一元多项式实根分离算法推广到多元常系数多项式组，并给出这种区间形式的实根的代入方法和判定，使其可应用于一类不等式问题. 第 2 章将给出包括吴方法、结式算法、 Gröbner 基，根的估计等基本理论和结论. 第 3 章给出关于多元多项式的实根分离 (mrealroot) 算法的理论及证明.

多元多项式系统的实根求解问题出现在大量的实际问题中. 考虑如下典型的两种群竞争扩散系统：

$$\dot{x}_1 = x_1(4 - x_1 - y_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(1 - x_2 - y_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2),$$

$$\dot{y}_1 = y_1(3 - 2x_1 - y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1),$$

$$\dot{y}_2 = y_2(3 - 2x_2 - y_2) + \frac{1}{2}(y_1 - y_2).$$

Goh 曾用计算机模拟显示此系统有惟一正平衡点且为全局稳定的. 根据单调系统理论，只需证明此系统有惟一的正平衡点即可保证系统的稳定性. 利用本书中的 mrealroot 算法可以给出该系统存在惟一正平衡点的证明并以区间形式给出其精确解. 多项式实根个数的判定及求解为第 4 章的主要内容，一些相关的问题也将在第 4 章中讨论.

1.2 平面系统的小扰动极限环

平面微分多项式系统小扰动极限环的存在性及个数是与 Hilbert 第十六问题密切相关的近 10 年来国际上普遍关注的问题. 现有文献中的各个作者都是针对不同问题，利用各自技巧根据中心 – 焦点的存在条件构造出尽可能多的极限环. 实际上，小扰动极限环的构造问题正是一个多项式组实零点的存在及结构的问题. 另一个自然的问题是：

问题 能否给出一个一般的算法用于构造平面微分多项式系统小扰动极限环？

小扰动极限环的构造总是通过利用 Poincaré 方法计算出焦点量，其为对应平面系统系数的多项式组. 对于小扰动极限环，我们证明了本书中 mrealroot 算

法可以判断多项式组的独立与否，并借此统一地完成小扰动极限环的构造．具体地讲，如果 mrealroot 算法求得的前 $k-1$ 个焦点量 (含 $k-1$ 个参数) 有实根使得第 k 个焦点量不为零，则原平面系统至少可以有 k 个小扰动极限环．而对于一个给定的微分系统，小扰动极限环的上界通常可以通过结式算法，验证前 k 个焦点量 (含 k 个参数) 无公共实根而得到．利用此方法，在第 5 章中我们统一地给出了近年来国际上一系列关于平面三次系统小扰动极限环上界或下界的最好结果．此方法理论上对于更为复杂和困难的问题也是有效的，只是需要我们在处理大多项式三角化方面提出更为有效的办法.

Liénard 系统是常微分方程定性及稳定性分析研究中的一类典型和重要的系统，其结论较为丰富．除了在应用科学，包括非线性电子环路，真空管震荡器中的广泛应用之外，在平面系统的相当一部分研究中，人们往往将所研究的系统进行变换化为 Liénard 系统以应用该系统已有研究结果．由于一般多项式微分系统极限环个数的上界问题几乎是一个不可能解决的问题，现在关于多项式 Liénard 系统的研究中，小扰动极限环个数的上界成为了重要的课题．与三次平面系统类似， Liénard 系统小扰动极限环的构造及个数的估计问题也可以化为一个纯代数及多项式组实根的存在判定问题．当然其问题本身与三次系统有一些差异，这是因为 Liénard 系统中的多项式次数可达到十几次，几十次，甚至更高．在第 6 章，我们将对 Liénard 系统的小扰动极限环问题进行详细的讨论.

1.3 弱中心及阶数

在中心焦点问题讨论中，我们没有涉及中心条件的论证，而只是在平面系统具有弱焦点时，利用 mrealroot 算法给出小扰动极限环的统一构造．而前者的讨论主要是一些技巧性和经验性的工作.

另一方面，当系统存在中心时，又可以进一步考虑其等时性．具体的讲，当系统存在 (非退化) 中心时，又可以考虑每个周期轨道的周期．当所有的周期都相同时，此中心称为等时中心．当中心为非等时时，可以根据周期常数定义其阶数，研究其定性性质及相关问题.

第 7 章中，我们首先给出弱中心及等时中心的定义及基本性质，讨论一些构造等时中心的常规论证．我们主要关心的是非等时中心时给出弱中心最大阶数的一般性论证．这包括周期常数的计算，周期函数系统 (多项式) 的三角化及 mrealroot 算法求解．与小扰动极限环类似，利用 mrealroot 算法求出前 k 个周期常数，其独立性保证了系统的中心正好为 k 阶弱中心.

本章中，我们将给出文献中关于弱中心构造问题的一个统一处理.

1.4 高维系统的极限环

除了以上几章考虑的平面多项式系统极限环的上界问题，我们将在第 8 章中考虑三维系统的极限环个数问题，由于其上界问题基本上不可能解决，我们考虑其下界问题，即至少存在多少极限环的问题．本章考虑数学生物学领域中最为基本和重要的 Lotka-Volterra 系统． May 及 Liénard 于 1975 年首次在一个特殊的三种群竞争 Lotka-Volterra 系统中利用计算机模拟发现了边界面上异宿轨及其排斥、吸引性. 法国数学家 Goste,Peyraud, Coullet, 奥地利数学家 Shuster 及 Hofbauer 分别独立考虑了更为一般的三维 Lotka-Volterra 竞争系统，证明了 May-Liénard 现象的普遍性及系统极限性态与边界异宿轨的非通有性. 虽然高维 Lotka-Volterra 系统极限环的存在性在 20 世纪 70 年代末期已经被解决，但多个极限环的存在性直到 1994 年才由 Hofbauer 和 So 根据 Hirsch 的单调系统和永久生存理论通过 Hopf 分支和 Poincaré-Bendixson 定理得到．我们将根据 Hirsch 的单调理论，沿 Hofbauer 和 So 的思路，利用线性变换将三维 Lotka-Volterra 系统的系数矩阵化为分块对角型，构造中心流形将三维系统降维．最后将极限环构造问题化为多项式组实根的存在问题，利用 mrealroot 算法给出结论．本章的结果给出了 Hofbauer 和 So 的一个公开问题的解答，否定了他们关于三维 Lotka-Volterra 竞争系统极限环最大个数的猜想, 同时给出了非竞争三维系统存在两个极限环的例子.

注 释

关于吴方法, 在吴文俊的系列论文及专著 [71, 72, 73] 中有详细论述，Gröbner 基方法由 Buchberger 在 [2] 中给出，牛顿算法及复杂度估计由 Smale[62] 给出，同伦算法的理论可在 [39] 中找到.

例 1.1.1 及例 1.1.2 均取自 [19], 其中例 1.1.1 最早由 [70] 给出，高维系统的极限环构造属于 Coste et al [17] 以及 Hofbauer [30].

第二章　基本理论

本章我们将给出为建立本书中心理论 mrealroot 算法所必需的以及在后面应用章节中要用到的一些概念和理论，包括多项式的序、理想、吴方法、结式方法、 Gröbner 基方法等.

2.1　多项式及理想

首先，我们从群、环、域的定义等基本概念开始.

定义 2.1.1　具有二元运算（乘法 $\cdot$ ）的集合 G 称为 **群**, 如果

1. G 在乘法运算下封闭

$$\forall a, b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G.$$

2. 乘法运算满足结合律

$$\forall a, b, c \in G \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

3. 存在单位元 $e \in G$, 使得

$$\forall a \in G \Rightarrow e \cdot a = a \cdot e = a.$$

4. G 的每个元有逆元

$$\forall a \in G,\ \exists a^{-1} \in G \Rightarrow a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e.$$

当满足 1,2 时， G 称为半群. 如果乘积运算是可交换的，即

$$\forall a, b \in G \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a,$$

则群 G 称为 Abel 群 (或交换群).

例如，整数集合在加法下构成整数群 (Z,+), 整数 a 的 (加法) 逆元为 $-a$. 又非零有理数集合在乘法下构成群 $(Q^*, \cdot)$, 有理数 p/q 的乘积逆元为 q/p. 而自然数集合在加法下构成半群 $(N, +)$, 此半群有加法意义上的单位元 0, 而所有元素无逆元. 整数在乘法下构成半群 $(Z, \cdot)$, 具有乘积单位元 1, 而所有元素无逆元. 所有 $n \times n$ 阶不可逆矩阵关于加法构成 Abel 群，关于乘法构成非 Abel 群.

定义 2.1.2 具有两种二元运算（加法 $+$, 乘法 $\cdot$）的集合 R 称为 **环**, 如果

1. R 关于加法构成 Abel 群，即 R 有零元 0, 且每个 $x \in R$ 有加法逆元 $-x$.

$$\forall x \in R,\ \exists -x \in R \Rightarrow x + (-x) = 0.$$

2. R 为乘法半群且满足乘法对加法的分配律.

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in R \Rightarrow x \cdot (y+z) &= x \cdot y + x \cdot z, \\ (y+z) \cdot x &= y \cdot x + z \cdot x. \end{aligned}$$

R 称为有单位元的环，如果存在 $1 \in R$ 使得

$$\forall x \in R \Rightarrow x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

R 称为交换环，如果其乘法半群 $(R, \cdot)$ 是可交换的

$$\forall x, y \in R \Rightarrow x \cdot y = y \cdot x.$$

环 R 的非空子集 R' 称为 R 的子环，如果 R' 关于 R 中的加法和乘法满足环的定义 2.1.2.

例如，整数 Z 、有理数 Q 、实数 R 、复数 C 均为环．所有偶数构成一无单位元的环.

定义 2.1.3 环 R 称为 **域**, 如果 R 中每个非零元均有（乘法）逆元.

域的子环如果为域，则称为子域.

例如，有理数 Q, 实数 R 以及复数 C 构成域．如果 p 为素数，则 Z_p(mod$p$ 剩余类所构成的环) 为有限域．有理数集 Q 为实数域 R 的子域.

定义 2.1.4 环 R 的子集 I 称为 **理想**, 如果其满足：

1. I 为 R 的加法子群

$$\forall a, b \in I \Rightarrow a - b \in I,$$

2. $RI \subset I$, 即 I 关于环中元素的乘法封闭

$$\forall\ a \in R, \forall\ b \in I \Rightarrow ab \in I$$

理想 $\{0\}$ 和 R 称为 R 的非真理想， R 的其他理想称为 R 的真理想.

设 $a \in R$, 且 R 具有单位元 $\mathbf{1}$, 则

$$(a) = \{ra : r \in R\}$$

构成一理想, 称为由 a 生成的主理想, 特别, 由零元素生成的主理想为 $(0) = \{0\}$, 而由单位元生成的主理想为 $(\mathbf{1}) = R$. 这样, 环 R 的非真理想为 (0) 和 $(\mathbf{1})$.

设 $a_1, \cdots, a_k \in R$, 则由 $a_1, \cdots, a_k$ 生成的理想为

$$(a_1, \cdots, a_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} r_i a_i : r_i \in R \right\}$$

如果理想 I 由子集 $F \subseteq I$ 生成, 则 F 称为理想 I 的基 (或生成子的系统).

定义 2.1.5 环 R 称为 **诺特环**, 如果 R 的任意理想具有有限生成基.

定义 2.1.6 一个域称为 **素域**, 如果它不包含任何真子域.

每个域 K 包含惟一的与 Q 或 Z_p(p 为素数) 同构的素域.

定义 2.1.7 域 K 具有特征 0 (记为特征 $K = 0$), 如果其素域与 Q 同构; 域 K 具有特征 $p > 0$ (记为特征 $K = P$), 如果其素域与 Z_p 同构.

定理 2.1.8 $K \neq \{0\}$ 为一域, 当且仅当 $1 \in K$ 且 K 无真子理想.

证明 $(\Rightarrow)$ 设 K 为域, $I \subset K$ 为理想且 $I \neq (0)$, 则存在 $0 \neq a \in I$. 因此, $1 = aa^{-1} \in I$. 故 $I = (1) = R$.

$(\Leftarrow)$ 设 $a \in K$ 为任意元素. 如果 $a \neq 0$, 则由 a 生成的主理想 (a) 一定异于 (0). 因为 K 无真理想, 故 $(a) = K$. 所以存在 $x \in K$ 使得 $xa = 1$, 即 a 在 K 中有逆, 故 K 为域.

推论 2.1.9 域必为诺特环.

证明 域 K 的理想为 (0) 和 (1), 均由单个元素生成.

我们用 R 表实数域, C 表复数域, Q 表有理数域, Z 表整数环 (对除法不封闭). 虽然本章中我们所考虑的多项式系数均属于实数域或有理数域, 但为方便起见, 在定义及性质的讨论中, 我们均考虑一般域 (记为 K) 上的多项式.

定义 2.1.10 变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的单项式为如下的乘积

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

其中所有指数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为非负整数, 其和 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 称为单项式的总次数.

若记 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 则 $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 可记为 x^α, 而 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 可记为 $|\alpha|$.

定义 2.1.11 系数属于域 K 的多项式环 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 由如下形式的多项式构成

$$f = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha, \qquad a_\alpha \in K$$

其中 a_α 为 x^α 的系数, $a_\alpha x^\alpha$ 为 f 的项, f 的次数 (记为 $\deg(f)$) 为使得 $a_\alpha \neq 0$ 的最大的 $|\alpha|$.

集合 X 中的二元关系 R 称为全序关系，如果

i) R 具有自反性，即对任意的 $a \in X$, 有 aRa;

ii) R 具有反对称性，即对任意的 $a,b \in X$, 如果 aRb 且 bRa, 则 $a=b$;

iii) R 具有传递性： aRb 且 bRc, 则 aRc;

iv) 对任意的 $a,b \in R$, 均有 aRb 或 bRa.

当满足 i), ii), iii) 时， R 称为偏序关系.

定义 2.1.12 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 中单项式 x^α 的任意全序关系 $\succ$ 称为 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上单项式的序，如果

i) $\succ$ 在 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上是相容的，即当 $x^\alpha \succ x^\beta$ 且 x^γ 为任意单项式，有 $x^\alpha x^\gamma = x^{\alpha+\gamma} \succ x^{\beta+\gamma} = x^\beta x^\gamma$.

ii) $\succ$ 为良序的，即在序 $\succ$ 下每个非空单项式集都有最小元.

下面是一些我们常用到的单项式的序.

定义 2.1.13 设 x^α， x^β 为 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上的单项式，

i)（字典序）$x^\alpha \succ_{lex} x^\beta$, 如果 $\alpha-\beta=(\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_n-\beta_n)$ 的第一个非零元为正;

ii)（逆字典序）$x^\alpha \succ_{rlex} x^\beta$, 如果 $\alpha-\beta=(\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_n-\beta_n)$ 的最后一个非零元为负;

iii)（分次字典序）$x^\alpha \succ_{grlex} x^\beta$, 如果 $|\alpha|>|\beta|$ 或 $|\alpha|=|\beta|$ 时， $x^\alpha \succ_{lex} x^\beta$;

iv) （分次逆字典序） $x^\alpha \succ_{grevlex} x^\beta$, 如果 $|\alpha| > |\beta|$ 或 $|\alpha| = |\beta|$ 时 ,$x^\alpha \succ_{rlex} x^\beta$.

定义 2.1.13 i) 中的字典序 (lex) 即最简单的单项式序. 如果以 $x_1 \succ \cdots \succ x_n$ 为序，则其定义为

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \succ_{lex} x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$$

当且仅当 $\alpha_1 \succ \beta_1$ 或 $\alpha_1=\beta_1$ 且 $\alpha_2 \succ \beta_2$, 以此类推. 特别地，有

$$x_1 \succ_{lex} x_2 \succ_{lex} \cdots \succ_{lex} x_n.$$

显然，如果我们给出变量 $x_1,\cdots,x_n$ 各种不同的字典序，则可以得到单项式 $n!$ 种字典序.

定义 2.1.13 iv) 定义了较为复杂且略显怪异的分次逆字典序 (grevlex):

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \succ_{grevlex} x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$$

当且仅当

$\alpha_1+\cdots+\alpha_n \succ \beta_1+\cdots+\beta_n$ 或者

$\alpha_1+\cdots+\alpha_n = \beta_1+\cdots+\beta_n$ 时，或者

$\alpha_n \prec \beta_n$, 或者 $\alpha_n = \beta_n$ 且 $\alpha_{n-1} \prec \beta_{n-1}$, 以次类推. 特别地，我们仍然有

$$x_1 \succ_{grevlex} x_2 \succ_{grevlex} \cdots \succ_{grevlex} x_n.$$

虽然分次逆字典序不如字典序直观，但在以后计算中我们可以发现，某些时候，前者比较后者更为有效. 显然，在给定 n 个变元不同的序后，其单项式的序 (在任意定义的序下) 也不相同，共有 $n!$ 种情形.

定理 2.1.14 *$\succ_{lex}, \succ_{grlex}$ 以及 $\succ_{grevlex}$ 均为单项式序.*

证明 以下证明 $\succ_{grevlex}$ 情形. 显然其为一偏序. 对每对 $\alpha, \beta \in N^n$, 当 $\alpha \neq \beta$ 时，我们有 $|\alpha| < |\beta|$ 或 $|\alpha| > |\beta|$ 或 $|\alpha| = |\beta|$. 而当 $|\alpha| = |\beta|$ 时， $\alpha - \beta$ 或 $\beta - \alpha$ 的最后一个元素必为负. 故 $\succ_{grevlex}$ 为一全序.

再考虑定义 2.1.13 中的条件 i), 即当

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i > \sum_{i=1}^{n} \beta_i (x^\alpha \succ_{grevlex} x^\beta)$$

时

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \gamma_i) > \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + \gamma_i) (x^{\alpha+\gamma} \succ_{grevlex} x^{\beta+\gamma}).$$

而当 $|\alpha| = |\beta|$ 时， $\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$, 即等式两端的最后一个元素相同. 最后考虑关于最小元的条件 ii). 设 $S \subseteq N^n$ 为非空集，令 $T \subseteq S$ 为 S 中所有总次数最小的单项式集，则 T 必为有限 (因为对任意 $m \in N$, 具次数 m 的单项式个数有限). 显然 $\min S = \min T$.

反字典序 $\succ_{alex}$ 不为良序. 例如， N^2 上的 $\succ_{alex}$ 定义为 $\alpha \succ_{alex} \beta$ 当且仅当 $\beta \succ_{lex} \alpha$. 此时， $S = N \times \{0\}$ 无最小元. 因为 $(0,0) \succ_{alex} (1,0) \succ_{alex} (2,0) \succ_{alex} \cdots$.

例 2.1.15 *考虑如下多项式* $(x \succ y \succ z)$,

$$x^2yz + 2xyz^3 + 3xy^3 + 4y^2z^2,$$

按不同的序关系可分别排列为:

i) *字典序:* $x^2yz + 3xy^3 + 2xyz^3 + 4y^2z^2$;

ii) *逆字典序:* $3xy^3 + x^2yz + 4y^2z^2 + 2xyz^3$;

iii) *分次字典序:* $2xyz^3 + x^2yz + 3xy^3 + 4y^2z^2$;

iv) *分次逆字典序:* $2xyz^3 + 3xy^3 + x^2yz + 4y^2z^2$.

一旦 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 上的单项式被确定下来，我们就可以得到一给定多项式的一个排列 (如上例) 并确定其首项 (leading term). 例如，将 $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$

记为
$$f = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha, a_\alpha \in K,$$
则 f 的首项定义为
$$LT(f) = \max_{\succ}\{a_\alpha x^\alpha | a_\alpha \neq 0\}$$
其中 $\max_{\succ}$ 表示依序 $\succ$ 的最高次项.

例 2.1.16 考虑多项式 $f = 4xyz^2 + 4x^3 - 5y^4 + 7xy^2z \in Q[x, y, z]$, 则依不同的序分别有

$$\begin{aligned} \succ_{lex}: \quad & LT(f) = 4x^3, \\ \succ_{grlex}: \quad & LT(f) = 7xy^2z, \\ \succ_{grevlex}: & LT(f) = -5y^4. \end{aligned}$$

特别，对于一元多项式环 $K[x]$, 惟一的单项式序为 $\cdots \succ x^2 \succ x \succ 1$. 所以，对于 $f \in K[x]$, 其首项 $LT(f)$ 即为 f 中具高次数的项.

对应于一般的理想定义 2.1.4, 我们给出多项式理想的定义.

定义 2.1.17 设 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 为非空子集. 称 I 为理想，如果 I 满足

i) 当 $f \in I$ 且 $g \in I$ 时，有 $f + g \in I$,

ii) 当 $f \in I$ 且 $p \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 时，有 $pf \in I$.

考虑 $f_1, \cdots, f_s \in K[x_1, \cdots, x_n]$. 记
$\langle f_1, \cdots, f_s\rangle = \{p_1 f_1 + \cdots + p_s f_s : p_i \in K[x_1, \cdots, x_n], i = 1, \cdots, s\}$, 则显然 $\langle f_1, \cdots, f_s\rangle$ 为一理想，且为 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 中包含 $f_1, \cdots, f_s$ 的最小理想. 即如果 J 为包含 $f_1, \cdots, f_s$ 的任意理想，则 $\langle f_1, \cdots, f_s\rangle \subset J$. 此时理想 $\langle f_1, \cdots, f_s\rangle$ 称为是由 $f_1, \cdots, f_s$ 生成的理想. $f_1, \cdots, f_s$ 称为理想 $\langle f_1, \cdots, f_s\rangle$ 的生成基或生成子的系统.

对于一元多项式的理想及其生成问题，有非常简单的结论.

定理 2.1.18（除法） 设 g 为 $K[x]$ 上的非零多项式，则每个 $f \in K[x]$ 可以写成
$$f = qg + r,$$
其中 $q, r \in K[x]$ 分别为商式和余式，且或者 $r = 0$ 或者 $\deg(r) < \deg(g)$.

下面的算法可以求得 q 和 r:

INPUT f, g

OUTPUT q, r

BEGIN

$q := 0; \quad r := f$

WHILE $r \neq 0$ AND $LT(g)$ divides $LT(r)$ DO

$q := q + \dfrac{LT(r)}{LT(g)}$

$r := r - \dfrac{LT(r)}{LT(g)}g$

END WHILE

RETURN q, r

END

定理 2.1.18 换一种说法即是：如果 $f, g \in K[x]$ 且 $g \neq 0$, 则 f 可惟一的表成

$$f = qg + r,$$

其中 $LT(g)$ 不整除 r 的每一项. 这种表述方式虽然不如 $r = 0$ 或 $\deg(r) < \deg(g)$ 显得简练，但其可很好的推广到多元多项式情形. 根据定理 2.1.18, 容易得到

定理 2.1.19 $K[x]$ 中的任意理想都可以表示为 $\langle f\rangle (f \in K[x])$, 即由单个多项式生成. 进一步，在允许相差一个 K 中的乘积因子时， f 是惟一的.

证明 任取理想 $I \subset K[x]$. 如果 $I = \{0\}$, 则 $I = \langle 0\rangle$. 设 $f \in I$ 且在 I 中次数最低. 下面证明 $\langle f\rangle = I$. 因为 I 为理想， $\langle f\rangle \subset I$ 是显然的. 现任取 $g \in I$, 由除法 (定理 2.1.18) 有 $g = qf + r$, $r = 0$ 或 $\deg(r) < \deg(f)$. 因为 I 为理想, 且 $qf \in I$, 所以 $r = g - qf \in I$. 如果 r 非零，则 $\deg(r) < \deg(f)$ 与 f 在 I 中次数最小矛盾.

故 $r = 0$, 即 $g = qf \in \langle I\rangle$. 此即证明了 $I = \langle f\rangle$.

为证惟一性，假设 $\langle f\rangle = \langle g\rangle$. 则由 $f \in \langle g\rangle$ 知存在 $h_g \in K[x]$, 使得 $f = h_g g$. 同样的，由 $g \in \langle f\rangle$ 知存在 $g_h \in K[x]$, 使得 $g = h_f f$. 所以 $h_g h_f = 1$.

由单个元素生成的理想称为主理想. 这样，每个一元多项式理想均为主理想.

一个自然的问题是：当 $I = \langle f, g\rangle (f, g \in K[x])$ 时，如何得到 I 的生成元？

为回答这个问题，我们需要考虑两个多项式的最大公因式.

定义 2.1.20 如果对于 $f, g \in K[x]$, 存在 h 使得

i) h 整除 f 和 g,

ii) 当 p 整除 f 和 g 时， p 整除 h,

则 h 称为 f 和 g 的最大公因式，记为 $h = \mathrm{GCD}(f, g)$.

最大公因式的主要性质有

定理 2.1.21 $f, g \in K[x]$, 则

i) $\mathrm{GCD}(f, g)$ 存在，且在允许相差一个 K 中的非零因式下惟一；

ii) $\mathrm{GCD}(f, g)$ 为理想 $\langle f, g\rangle$ 的生成子.

利用 Euclidean 算法可以求得 $\mathrm{GCD}(f,g)$

```
INPUT    f,  g
OUTPUT   h
BEGIN
    h := f;   s := g
    WHILE s ≠ 0 DO
        r := rem(h,s);       /* 求 h 除以 s 的余式 */
        h := s;   s := r
    END WHILE
    RETURN h
END
```

在实际的运算中，其 Euclidean 除法可用伪除法代替.

显然，对于 $K[x]$ 上的多个多项式， $f_1,\cdots,f_s$, 可类似定义其最大公因式 $h=\mathrm{GCD}(f_1,\mathrm{GCD}(f_2,\cdots,f_s))$. 这样, 重复利用两个多项式的最大公因式算法, 即可求得 $\mathrm{GCD}(f_1,\cdots,f_s)$.

例如，考虑四个多项式 f_1,f_2,f_3,f_4 的 GCD 有,

$$\begin{aligned}\mathrm{GCD}(f_1,f_2,f_3,f_4)&=\mathrm{GCD}(f_1,\mathrm{GCD}(f_2,f_3,f_4))\\&=\mathrm{GCD}(f_1,\mathrm{GCD}(f_2,\mathrm{GCD}(f_3,f_4)))\end{aligned}$$

例 2.1.22 求理想 $I=\langle x^3-3x+2,x^4-1,x^6-1\rangle\subset K[x]$ 的生成子，并验证是否有 $f_1=x^3+4x^2+3x-7\in I$, $\quad f_2=x^{18}-32x^{14}+19x^3+12\in I$.

解 因为 $\mathrm{GCD}(x^3-3x+2,x^4-1,x^6-1)=x-1$ 所以 $I=\langle x-1\rangle$. 又 $f_1=x^3+4x^2+3x-7=(x^2+5x+8)(x-1)+1$, 故 $f_1\notin I$. 由 $f_2(1)=0$ 知 $f_2\in I$.

例 2.1.22 给出了寻求理想的生成元以及判断一个多项式是否属于一个理想 (及理想成员问题) 的一般方法.

下一节我们将考虑 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上多项式的理想成员问题：即构造理想的某种好基 (生成元), 再利用广义的除法算法判定一个多项式是否属于一个给定的理想.

对应于一元多项式环 $K[x]$ 上多项式理想的生成定理，多元多项式环 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上有对应的 Hilbert 基定理.

在给出 Hilbert 基定理之前, 我们先介绍单项式理想的概念以及单项式理想有限生成的 Dickson 引理.

定义 2.1.23 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 称为一个单项式理想，如果存在 $A \subset Z^n_{\geqslant 0}$ 使得

$$I = \left\langle \left\{ \sum_{\alpha \in A} h_\alpha x^\alpha | h_\alpha \in K[x_1, \cdots, x_n] \right\} \right\rangle$$

记为 $I = \langle x^\alpha | \alpha \in A \rangle$.

引理 2.1.24 设 $I = \langle x^\alpha | \alpha \in A \rangle$ 为单项式理想，则对 $\beta \in Z^n_{\geqslant 0}$ 有

$$x^\beta \in I \quad \text{当且仅当} \quad \exists \alpha \in A,\ x^\alpha | x^\beta.$$

证明 (只需证 $x^\beta \in I \Rightarrow x^\alpha | x^\beta$.) 由 $x^\beta \in I$, 存在 $h_i \in K[x_1, \cdots, x_n]$, 使得

$$x^\beta = \sum_{i=1}^{s} h_i x^{\alpha_i}.$$

这样，存在 α_i, 使得 x^{α_i} 整除上式右端每一项，故

$$x^{\alpha_i} | x^\beta.$$

引理 2.1.25 设 $I = \langle x^\alpha | \alpha \in A \rangle$, 则如下条件等价

i) $f \in I$;

ii) f 的每一项 $\in I$;

iii) f 为 I 中单项式之线性组合.

证明 iii)$\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) 显然成立.

考虑 i) $\Rightarrow$ iii). 由 $f \in I$ 有 $f = \sum_i h_{\alpha_i} x^{\alpha_i}, \forall i$, 存在 $\alpha \in A$ 使得

$$x^\alpha | x^{\alpha_i},$$

故 f 为 I 中单项式之线性组合.

推论 2.1.26 两个单项式理想相等当且仅当其包含相同的单项式.

定理 2.1.27 (Dickson 引理) $I = \langle x^\alpha | \alpha \in A \rangle (A \subset Z^n_{\geqslant 0})$ 为单项式理想，则 I 有有限基：

$$I = \langle x^{\alpha(1)}, \cdots, x^{\alpha(s)} \rangle, \alpha(i) \in A.$$

证明 关于 $n : x = (x_1, \cdots, x_n)$ 利用归纳法

$n = 1$ 时， $I = \langle x^\alpha \rangle, \alpha \in A \subset Z_{\geqslant 0}$(非负整数) 取 $\beta = \min\{\alpha | \alpha \in A\}$, 则 $I = \langle x^\beta \rangle$.

设 $n-1$ 个变量时，命题成立. 考虑单项式理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_{n-1}, y]$(以 y 代 x_n), 则 I 中每个单项式有形式

$$x^\alpha y^l \in I,$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})\in Z_{\geqslant 0}^{n-1}, l\in Z_{\geqslant 0}$. 又考虑单项式理想： $J=\langle x^{\alpha}|x^{\alpha}y^{l}\in I\rangle$. 由归纳假设， J 有有限基，即存在 $\alpha(1),\cdots,\alpha(s)$ 使得

$$J=\langle x^{\alpha(1)},\cdots,x^{\alpha(s)}\rangle.$$

显然，对每个 $x^{\alpha(i)}$, 必有 m_i 存在，使得

$$x^{\alpha(i)}y^{m_i}\in I.$$

现在构造 I 之"切片"J_k. 取 $M=\max\{m_i|i=1,\cdots,s\}$

考虑 $y^k(k=0,1,\cdots,M)$:

$$\begin{aligned}
k= &\ 0: J_0=\langle x^{\alpha_0}y^0\rangle(\text{由归纳假设})=\langle x^{\alpha_0(1)},\cdots,x^{\alpha_0(s_0)}\rangle\cap I,\\
k= &\ 1: J_1=\langle x^{\alpha_1}y^1\rangle(\text{由归纳假设})=\langle x^{\alpha_1(1)}y,\cdots,x^{\alpha_1(s_1)}y\rangle\cap I,\\
&\cdots\\
k= &\ M-1: J_{M-1}=\langle x^{\alpha_{M-1}}y^{M-1}\rangle(\text{由假设})\\
= &\ \langle x^{\alpha_{M-1}(1)}y^{M-1},\cdots,x^{\alpha_{M-1}(s_{M-1})}y^{M-1}\rangle\cap I;
\end{aligned}$$

最后有

$$K=M:J_M=\langle x^{\alpha(1)}y^M,\cdots,x^{\alpha(s)}y^M\rangle\cap I.$$

记 $JJ=J_0\cup J_1\cup\cdots\cup J_{M-1}\cup J_M$, 显然， $JJ\subset I$, 现在证明 $I\subset JJ$.

设 $x^py^q\in I$.

(i) $q\geqslant M$. 因为 $x^p\in J$, 所以存在 $x^{\alpha}\in J$, 使得 $x^{\alpha}|x^p$, 即 $x^{\alpha}y^M|x^py^z$, 故 $x^py^q\in J_M$.

(ii) $q\leqslant M-1$. 考虑"切片"

$$J_q=\langle x^{\alpha_q(1)}y^q,\cdots,x^{\alpha_q(s_q)}y^q\rangle.$$

因为存在 $\alpha_q(i)$ 使得 $x^{\alpha_q(1)}y^q|x^py^q$, 所以 $x^py^q\in J_q$. 故 $I=JJ$.

下面，以 $LT(f)$ 记多项式 f 在某给定序下的首项.

定义 2.1.28 $I(\neq\{0\})\subset K[x_1,\cdots,x_n]$ 为理想,

(i) $LT(I)=\{cx^{\alpha}|\exists f\in I, LT(f)=cx^{\alpha}\}$, 即 $LT(I)$ 为 I 中所有 f 的首项.

(ii) $\langle LT(I)\rangle$ 为由 $LT(I)$ 所生成的理想.

注 若 $I=\langle f_1,\cdots,f_s\rangle$, 则

(i) $\langle LT(f_1),\cdots,LT(f_s)\rangle$ 与 $\langle LT(I)\rangle$ 并不相同.

(ii) 当 $LT(f_i)\in\langle LT(I)\rangle$ 时，有 $\langle LT(f_1),\cdots,LT(f_s)\rangle=\langle LT(I)\rangle$

例 2.1.29 $I=\langle f_1,f_2\rangle, f_1=x^3-2xy, f_2=x^2y-2y^2+x$. 因为 $x^2=xf_2-yf_1\in I$, 所以 $x^2\in\langle LT(I)\rangle$, 而 $LT(f_1)=x^3\nmid x^2, LT(f_2)=x^2y\nmid x^2$, 所以有 $x^2\notin\langle LT(f_1),LT(f_2)\rangle$

有了以上准备，我们给出本节的主要结论：

定理 2.1.30 (Hilbert 基定理) $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上的每个理想 I 都有有限生成基，即存在 $f_1,\cdots,f_s\in I$, 使得 $I=\langle f_1,\cdots,f_s\rangle$.

证明 设 $I=\langle g_\alpha|\alpha\in A\rangle$, 考虑单项式理想 $\langle LT(I)\rangle$. 由 Dickson 引理，$\langle LT(I)\rangle$ 有有限生成基，即存在 $g_1,\cdots,g_t\in I$ 使得

$$\langle LT(I)\rangle=\langle LT(g_1),\cdots,LT(g_t)\rangle.$$

对于给定的 $f\in I$, 我们有 (广义除法)

$$f=a_1g_1+\cdots+a_tg_t+r$$

并且要求 $LT(g_i)\nmid r$, 否则的话，可将 r 写入 g_i. 这样就有

$$r=f-a_1g_1-\cdots-a_tg_t\in I.$$

如果 $r\neq 0$, 则

$$LT(r)\in\langle LT(I)\rangle=\langle LT(g_1),\cdots,LT(g_s)\rangle$$

由引理 2.1.24, 存在 i 使得 $LT(g_i)|LT(r)$ 矛盾. 故 $r\equiv 0$. 即 $I=\langle g_1,\cdots,g_t\rangle$.

又由于 g_i 均可由 I 中元素表示出，不妨设为 $\{f_1,\cdots,f_s\}$, 最后即得

$$I=\langle f_1,\cdots,f_s\rangle.$$

2.2 Gröbner 基

Hilbert 基定理保证了任意理想具有有限生成基. 由于一元多项式理想 I 均为主理想，即在相差一个常数乘积下其生成元 f 惟一， $I=\langle f\rangle$. 所以在单变元情形，g 是否属于 I 取决于 g 关于 f 的余式是否为零. 这样，在单变元情形，理想成员问题已得到完全解决. 为说明 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上多项式理想的成员问题，我们先引入广义除法 ($K[x_1,\cdots,x_n]$ 上的除法).

在 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上给定单项式序 $\succ$, $F=\{f_1,\cdots,f_s\}$ 为 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上的多项式集，则每个 $f\in K[x_1,\cdots,x_n]$ 可以写成

$$f=q_1f_1+\cdots+q_sf_s+r,\tag{2.1}$$

其中 $q_i,r\in K[x_1,\cdots,x_n]$, 且余式满足：

$$r=0\text{或 }r\text{的每一单项不被}LT(f_i)(i=1,\cdots,s)\text{整除.}\tag{2.2}$$

(2.1) 还应该满足自然的条件

$$LT(f) \succ LT(q_i f_i), i = 1, \cdots, s. \tag{2.3}$$

满足 (2.2) 和 (2.3) 的表达式 (2.1) 称为标准式.

广义除法的算法如下：

```
INPUT      f_1, ··· , f_s, f
OUTPUT     q_1, ··· , q_s, r
BEGIN
  q_1 := 0; ··· q_s := 0; r := 0
  p:=f
  WHILE p ≠ 0 DO
    i := 1
    division occurred:=false
    WHILE i ⩽ s AND division occurred=false DO
      IF LT(f_i) divides LT(p) THEN
        q_i := s_i + LT(p)/LT(f_i)
        p := p − (LT(p)/LT(f_i))f_i
        division occurred:=true
        ELSE
        i := i + 1
      END IF
      IF division occurred=false THEN
        r := r + LT(p)
        p := p − LT(p)
      END IF
    END WHILE
  END WHILE
END
```

F 除 f 的余式 r, 记为 $r = \bar{f}^F$.

对于多项式考虑如上广义除法是因为一元多项式的理想均为主理想，而多元多项式的理想一般来说都不是由单一多项式生成．我们必须考虑由多个多项式 $F = \{f_1, \cdots, f_s\}$ 所生成的理想 I 及成员问题．显然，当 $r = \bar{f}^F = 0$ 时，$f \in \langle f_1, \cdots, f_s \rangle$．现在的问题是：如果 $f \in \langle f_1, \cdots, f_s \rangle$, 是否 $r = \bar{f}^F = 0$ 必成立？一般来说，多项式 f 被多项式集 F 所除的表达式 (2.1) 并不是惟一的，改变 F 中多项式的顺序或选择单项式的不同序会产生不同的 a_i 和 r.

例 2.2.1 考虑多项式 $f = x^2 + \frac{1}{2}y^2z - z - 1$ 及理想 $I = \langle f_1, f_2\rangle$, 其中$f_1 = x^2 + z^2 - 1, f_2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 4$. 则按 x, y, z 的字典序, 可得

$$f = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \left(\frac{1}{2}y^2z - z^2 - z\right).$$

而 $r_1 = \bar{f}^F = \frac{1}{2}y^2z - z^2 - z \neq 0$. 又以 y, x, z 的字典序, 用 f_2, f_1 去除 f, 则有

$$f = \left(-\frac{1}{2}z + 1\right) f_1 + \frac{1}{2}zf_2 + 0.$$

即 $r_2 = 0$.

所以 $f \in \langle f_1, f_2\rangle$. 这说明：余式 r 不为零并不说明 $f \notin \langle f_1, f_2\rangle$. r 不为零是因为理想 I 的生成元 f_1 和 f_2 的首项 $LT(f_1) = LT(f_2) = x^2$ 不能整除 r 的首项 $\frac{1}{2}y^2z$. 为了使得 $f \in I$ 时， f 被 I 的某个生成基所除其余式为零，我们需要利用此生成基的首项去掉 I 中所有元素的首项.

给定 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 上单项式序 $\succ$, 考虑由理想 $I = \langle f_1, \cdots, f_s\rangle$ 中所有首项所生成的理想 $\langle LT(I)\rangle$:

$$\langle LT(I)\rangle = \{LT(f) | \forall f \in I \setminus \{0\}\}$$

则显然有

$$\langle LT(f_1), \cdots, LT(f_s)\rangle \subseteq \langle LT(I)\rangle.$$

下面的例子说明包含关系可以是严格的.

例 2.2.2 取 $f_1 = x^3 - 2xy$, 而 $f_2 = x^2y - x - 2y^2$, 则

$$x^2 = y \cdot (x^3 - 2xy) - x \cdot (x^2y - x - 2y^2) = y \cdot f_1 - x \cdot f_2 \in \langle f_1, f_2\rangle.$$

依字典序 $\succ_{lex}$, 我们有， $LT(f_1) = x^3, LT(f_2) = x^2y$. 所以 $LT(x^2) = x^2 \notin \langle x^3, x^2y\rangle = \langle LT(f_1, LT(f_2)\rangle$.

一般来说, 理想首项的理想往往严格大于理想生成子的首项所生成的理想. 当二者严格相等时，就产生了本章的主题： Gröbner 基.

定义 2.2.3 给定单项式序 $\succ$ 以及理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n], \{g_1, \cdots, g_t\} \subset I$ 称为 I 的 Gröbner 基，如果

$$\langle LT(g_1), \cdots, LT(g_t)\rangle = \langle LT(I)\rangle.$$

具体的讲， $\{g_1, \cdots g_t\} \subset I$ 为一 Gröbner 基，如果对 I 中每个元 f, 存在 g_i 使得 $LT(g_i)$ 整除 $LT(f)$. 以下的定理证明了 Gröbner 基的存在性以及其确为对应理想的基.

定理 2.2.4 给定 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上的序 $\succ$ 以及理想 $I\subset K[x_1,\cdots,x_n]$, 则 I 有 Gröbner 基, 且 Gröbner 基确为 I 的生成基.

证明 Hilbert 基定理保证了 $\langle LT(I)\rangle$ 有有限生成基 $h_1,\cdots,h_s$. 因为 $\langle LT(I)\rangle$ 由 I 中元素的首项所生成, 所以每个 h_i 又可表成 I 中某些元素的首项之和. 这样, 存在 $g_1,\cdots,g_t\in I$ 使得 $h_1,\cdots,h_s\in\langle LT(g_1),\cdots,LT(g_t)\rangle$. 故 $\langle LT(I)\rangle=\langle h_1,\cdots,h_s\rangle\subset\langle LT(g_1),\cdots,LT(g_t)\rangle\subset\langle LT(I)\rangle$. 因此 $\langle LT(I)\rangle=\langle LT(g_1),\cdots,LT(g_t)\rangle$. 由定义 2.2.3, $\{g_1,\cdots,g_t\}$ 为 Gröbner 基.

下面证明 $I=\langle g_1,\cdots,g_t\rangle$. 因为 $g_1,\cdots,g_t\in I$, 所以 $\langle g_1,\cdots,g_t\rangle\subset I$ 显然成立. 现任取 $f\in I$, 关于 $\{g_1,\cdots,g_t\}$ 作广义除法

$$f=q_1g_1+\cdots+q_tg_t+r.$$

现在证明 $r=0$, 否则由于

$$r=f-(q_1g_1+\cdots+q_tg_t)\in I\setminus\{0\},$$

有

$$LT(r)\in\langle LT(I)\rangle=\langle LT(g_1),\cdots,LT(g_t)\rangle.$$

这样, $LT(r)$ 将被某个 $LT(g_i)$ 整除, 与广义除法 (2.1) 中要求 r 的每一项不被每个 $LT(g_i)$ 整除相矛盾. 故 $r\equiv 0$.

由此定理容易得到如下的结果:

定理 2.2.5 假设 $\{g_1,\cdots g_t\}$ 为理想 I 的 Gröbner 基, 而 $f\in K[x_1,\cdots,x_n]$, 则 f 可惟一的表为

$$f=g+r,$$

其中, $g\in I$ 且 r 的每一项均不被 $LT(g_i)(i=1,\cdots,t)$ 整除. 特别的, $f\in I$ 当且仅当 $r=0$.

证明 存在性由广义除法直接得到. 下面证明惟一性. 设 $f=h_1+r_1=h_2+r_2$, 其中 $h_1,h_2\in I$ 且 r_1 和 r_2 中每一项均不被 $LT(g_i)$ $(i=1,\cdots,t)$ 整除, 这样有 $r_1-r_2=h_2-h_1\in I$.

所以必有 $LT(g_i)$ 使得 $LT(r_1-r_2)$ 可被其整除. 从而 $r_1-r_2=0$. 而余式的惟一性保证了 $f\in I$ 的充要条件是 $r=0$.

记 $G=\{g_1,\cdots,g_t\}$ 为 Gröbner 基, 则 f 被 G 除的余式 r 记为

$$r=\bar{f}^G$$

这样, 确定一个理想成员的问题就化为了寻找一给定理想的 Gröbner 基的问题. 注意, 定理 2.2.5 中的惟一性只是关于余式 r 的. 当 f, $G=\{g_1,\cdots,g_s\}$ 和 r 满足 (2.1) 时, $q_i(i=1,\cdots,s)$ 可以不惟一.

例 2.2.6 $G=\{x+z,y-z\}$ 以字典序为 Gröbner 基，考虑 $f=xy$ 分别以 $x+z,y-z$ 和 $y-z,x+z$ 为序的除法，有

$$xy=y(x+z)-z(y-z)-z^2,$$

$$xy=x(y-z)+z(x+z)-z^2.$$

这样，在不同的序下，广义除法有相同的余式，但 a_i 不同.

Gröbner 基首先由 H.Hironaka 以标准基为名于 20 世纪 60 年代中期引入. 稍后 Buchberger 在其博士论文中重新独立提出，并以其导师 W. Gröbner 的名字命名. Buchberger 在提出 Gröbner 基理论的同时，给出了构造一给定理想的 Gröbner 基的算法.

定义 2.2.7 设非零多项式 $f,g\in K[x_1,\cdots,x_n]$, 取定单项式序, 且令 $LT(f)=C_fx^\alpha$, $LT(g)=C_gx^\beta$, 其中 $C_f,C_g\in K$, 又设 x^γ 为 x^α 和 x^β 的最小公倍式，则如下的多项式

$$S(f,g)=\frac{x^\gamma}{LT(f)}f-\frac{x^\gamma}{LT(g)}g$$

称为 f 和 g 的 S 多项式，记为 $S(f,g)$.

由 S 多项式，我们可以判定一个理想 I 的有限子集 G 是否为 I 的 Gröbner 基.

定理 2.2.8 (Buchberger 判据) 理想 I 的子集 $G=\{g_1,\cdots,g_t\}$ 为 I 的 Gröbner 基当且仅当对于 $i\neq j$,

$$\overline{S(g_i,g_j)}^G=0.$$

这里 $\overline{S(g_i,g_j)}^G$ 表示 G 除 $S(g_i,g_j)$ 的余式.

此判据不仅给出了判断 Gröbner 基的算法，而且告诉我们当 $\{g_1,\cdots,g_t\}$ 不为 Gröbner 基时，如何去构造 Gröbner 基. 比如，基 $F=\{f_1,\cdots,f_t\}$ 不为 Gröbner 基，其中有 $i<j$ 使得 $\overline{S(f_i,f_j)}^F\neq 0$, 则我们应该将此余式加入到基 F 中再进行判断.

例 2.2.9 考虑字典序下的 $F=\{f_1,f_2\}=\{x^3-2xy,x^2y-x-2y^2\}$.
容易知道 $\overline{S(f_1,f_2)}^F=x^2=f_3$. 所以令 $F_1=\{f_1,f_2,f_3\}$. 又

$$\overline{S(f_1,f_2)}^{F_1}=0,$$
$$\overline{S(f_1,f_3)}^{F_1}=-2xy=f_4,$$
$$\overline{S(f_2,f_3)}^{F_1}=-x-2y^2=f_5.$$

这样， F_1 自然不为 Gröbner 基. 又将如上的非零余式加入到 F_1 中可得, $F_2=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}$. 通过简单计算，有

$$\overline{S(f_1,f_5)}^{F_2} = -4y^3,$$
$$\overline{S(f_4,f_5)}^{F_2} = -2y^3,$$
$$\overline{S(f_i,f_j)}^{F_2} = 0, \text{对于其他所有 } i<j.$$

现在将 $f_6 = y^3$ 加入到 F_2 中有， $F_3 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$. 现在

$$\overline{S(f_i,f_j)}^{F_3} = 0, \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant 6.$$

这样， $\langle x^3 - 2xy, x^2 - x - 2y^2\rangle$ 在字典序下的 Gröbner 基即为

$$F_3 = \{x^3 - 2xy, x^2y - x - 2y^2, x^2, -2xy, -x - 2y^2, y^3\}.$$

一般情形下 Gröbner 基的构造与例 2.2.9 是类似的. 这样，根据定理 2.2.8，我们可以给出构造一给定理想 $I = \langle f_1, \cdots, f_s\rangle$ 的 Gröbner 基的 Buchberger 算法：

INPUT　　$F = (f_1, \cdots, f_s)$

OUTPUT　a Gröbner basis $G = (g_1, \cdots, g_t)$ for I, with $F \subset G$

BEGIN

　$G := F$

　REPEAT

　　$G' := G$

　　FOR each pair p, q, $p \neq q$ in G' DO

　　　$S := \overline{S(p,q)}^{G'}$

　　　IF $S \neq 0$ THEN $G := G \cup S$

　　END FOR

　UNTIL $G = G'$

END

但是，由例 2.2.9 可以看出，此算法所得到的 Gröbner 基多项式较多. 实际上有一个算法化方法可以化简一给定的 Gröbner 基 $G = \{g_1, \cdots, g_t\}$:

引理 2.2.10　设 G 为多项式理想 I 的 Gröbner 基，多项式 $p \in G$ 且 $LT(p) \in \langle LT(G \setminus \{p\})\rangle$，则 $G \setminus \{p\}$ 也为 I 的 Gröbner 基.

证明　因为 $\langle LT(G)\rangle = \langle LT(I)\rangle$，所以如果 $LT(p) \in \langle LT(G \setminus \{p\})\rangle$，则 $LT(G \setminus \{p\}) = \langle LT(G)\rangle$. 由定义 $G \setminus \{p\}$ 也为 I 的 Gröbner 基.

定义 2.2.11　I 的 Gröbner 基 G 称为最小的 Gröbner 基，如果

(i)　所有 $p \in G$ 为首一的，

(ii)　对所有 $p \in G$，有 $LT(p) \notin \langle LT(G \setminus \{p\})\rangle$.

再考虑利用例 2.2.9 的 Gröbner 基

$$F_3 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\} = \{x^3 - 2xy, x^2y - x - 2y^2, x^2, -2xy, -x - 2y^2, y^3\}.$$

因为 $LT(f_1) = x^3 = xLT(f_3)$, $LT(f_2) = yLT(f_3), LT(f_3) = -xLT(f_5), LT(f_4) = -LT(f_5)$, 故由引理 2.2.10, f_1, f_2, f_3, f_4 可以从 F_3 中去掉. 再将剩下的多项式首一化，则有 F_3 的极小 Gröbner 基：

$$G_{\min} = \langle x + 2y^2, y^3\rangle,$$

但显然对任意常数 a

$$G'_{\min} = \langle x + ay^3 + 2y^2, y^3\rangle,$$

也为 F_3 的极小 Gröbner 基. 即是说我们可以有无限多的极小 Gröbner 基. 从 $G'_{\min}$ 的结构可以看出，存在 $g_1 = x + ay^3 + 2y^2 \in G'_{\min}$, 使得其中的项 $ay^3 \in \langle LT(G'_{\min} \setminus \{g_1\})\rangle$. 下面我们通过去掉这一类的项得到一个特别的极小 Gröbner 基.

首先将每个 g_i 换成其除以 $G \setminus \{g_i\}$ 的余式，然后去掉余式为零的多项式，最后将剩下的多项式首一化. 这样得到的称为约化的 Gröbner 基. 更准确的定义如下：

定义 2.2.12 *多项式的理想 I 的 Gröbner 基 $G = \{g_1, \cdots, g_t\}$ 称为是约化的 Gröbner 基，如果*

i) *所有 g_i 都是首一的.*

ii) *所有 g_i 的项均不属于 $\langle LT(G \setminus \{g_i\})\rangle$.*

在例 2.2.9 中, 对应于 Gröbner 基 $F_3 = \{x^3-2xy, x^2y-x-2y^2, x^2, -2xy, -x-2y^2, y^3\}$ 的约化的 Gröbner 基为

$$G_r = \{x + wy^2, y^3\}.$$

一般的，约化的 Gröbner 基有如下的很好的性质.

定理 2.2.13 *设 $I \neq \{0\}$ 为多项式理想，则对任意给定的单项式序， I 有惟一的约化 Gröbner 基.*

证明 设 G 为 I 的最小 Gröbner 基. 如果 $g \in G$ 的每一项均不属于 $\langle LT(G) \setminus \{g\})\rangle$, 则 g 关于 G 为约化的. 现在我们修正 G 使其所有元素为约化的.

因为约化仅与首项有关，所以如果 g 关于 G 为约化的，则 g 关于所有包含 g 的理想 I 的最小 Gröbner 基 (具有同样首项的多项式集) 约化. 又给定 $g \in G$, 令 $g' = \bar{g}^{G \setminus \{g\}}$ 且 $G' = (G \setminus \{g\}) \cup \{g'\}$, 则 G' 为 I 的最小 Gröbner 基. 首先 $LT(g') = LT(g)$, 这是因为用 $G \setminus \{g\}$ 除 g 时， $LT(g)$ 包含在余式之中 (因它不

被 $LT(G\setminus\{g\})$ 的任意元素除尽. 故 $\langle LT(G')\rangle = \langle LT(G)\rangle$. 显然, G' 包含在 I 中, 所以为最小 Gröbner 基. 由论证可知 g' 关于 G' 是约化的. 现取遍 G 中的所有元素并重复以上过程使得所有元素关于 G 为约化的. 由于约化过程中首项不变, 所以一个被约化的元素在以后过程中总是被约化的. 所以最后必得约化的 Gröbner 基.

再证惟一性. 假设 G 和 $\hat{G}$ 均为 I 的约化 Gröbner 基. 特别的, G 和 $\hat{G}$ 均为最小 Gröbner 基, 易知它们有相同的首项, 即

$$LT(G) = LT(\hat{G}).$$

所以, 给定 $g \in G$, 有 $\hat{g} \in \hat{G}$ 满足 $LT(g) = LT(\hat{g})$. 考虑 $g - \hat{g}$, 因为 G 为 I 的 Gröbner 基, 所以 $\overline{g-\hat{g}}^{G} = 0$. 而我们有 $LT(g) = LT(\hat{g})$. 故 $\overline{g-\hat{g}}^{G} = g - \hat{g}$. 从而 $g - \hat{g} = 0$. 因此由 g 的任意性有 $G = \hat{G}$.

以上定理的一个直接结果给出了理想相等的一个判定算法.

定理 2.2.14

两个理想相等当且仅当它们以相同的序具有相同的约化 Gröbner 基.

即为了判定两个多项式集 $\{f_1, \cdots, f_s\}$ 和 $\{g_1, \cdots, g_t\}$ 是否生成同样的理想, 首先取定单项式序, 再计算二者生成理想 $\langle f_1, \cdots, f_s\rangle$ 及 $\langle g_1, \cdots, g_t\rangle$ 的约化 Gröbner 基. 这样, 理想相等当且仅当二约化 Gröbner 基恒同.

这里约化基表示每个多项式相对其他的多项式是完全约化的. 形式上 $\{x-1, (x-1)^2\}$ 与 $\{x-1\}$ 是不同的基, 这是因为前者没有完全约化, 实际上二者是相同的. 此定理同时说明理想有规范的表示 (约化 Gröbner 基).

另一方面, Gröbner 基方法可以用于多项式组的求解及解存在与否的判定. 对于 $\{f_1, \cdots f_s\} \subset K[x_1, \cdots, x_n]$, 考虑理想 $I = \langle f_1, \cdots, f_s\rangle$, 利用如下的交运算逐次消去变元,

$$\begin{array}{ll} I \cap K[x_2, \cdots, x_n] & \text{消去 } x_1; \\ I \cap K[x_3, \cdots, x_n] & \text{消去 } x_1, x_2; \\ \cdots & \cdots \\ I \cap K[x_n] & \text{消去 } x_1, \cdots, x_{n-1}. \end{array}$$

这些称为消元理想. 现在我们希望得到各个消元理想 $I \cap K[x_k, \cdots, x_n]$ 的生成基, 正好利用字典序的 Gröbner 基是有效的.

定理 2.2.15 (*消元定理*) *如果 $I = \langle f_1, \cdots, f_s\rangle \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 为一理想, 而 $G = \{g_1, \cdots, g_t\}$ 为字典序 $x_1 \succ \cdots \succ x_n$ 下 I 的 Gröbner 基, 则对每个 $k \in \{2, \cdots, n\}$, 集合 $G \cap K[x_k, \cdots, x_n]$ 为消元理想 $I \cap K[x_k, \cdots, x_n]$ 的 Gröbner 基.*

例 2.2.16 记 $f_1=x^2+y+z-1, f_2=x+y^2+z-1$ 和 $f_3=x+y+z^2-1$. 考虑理想 $I=\langle f_1,f_2,f_3\rangle$. 以字典序 $x\succ y\succ z$ 可得 I 的 Gröbner 基

$$\begin{aligned}g_1&=x+y+z^2-1,\\g_2&=y^2-y-z^2+z,\\g_3&=2yz^2+z^4-z^2,\\g_4&=z^6-4z^4+4z^3-z^2.\end{aligned}$$

这样，就有

$g_1,g_2,g_3,g_4\in I$, 且为 I 的 Gröbner 基,

$g_2,g_3,g_4\in I\cap K[y,z]$, 且为 $I\cap K[y,z]$ 的 Gröbner 基,

$g_4\in I\cap K[z]$, 且为 $I\cap K[z]$ 的 Gröbner 基.

从原理上讲，我们可以利用消元定理给出求解多项式系统的算法．即将多元多项式组的求解问题通过反代入转换为一元多项式的求解问题．特别是当多项式组的零点是零维时，此方法十分有效．具体对于如上多项式组 I, 其根的性态与其 Gröbner 基 $G=\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$ 的性态完全一样．反代的过程是先在 $I\cap K[z]=\langle g_4\rangle$ 中解出 z, 再在 $I\cap K[y,z]=\langle g_2,g_3,g_4\rangle$ 中解出 y, 最后解出 x.

现在将上面的过程严密化．设 $I=\langle f_1,\cdots,f_s\rangle\subset K[x_1,\cdots,x_n]$, 记 $I_1=I\cap K[x_2,\cdots,x_n]$(即 I_1 消去了 x_1). 现在的问题是得到局部解 $(a_2,\cdots,a_n)$ 后如何保证可得到真解 $(a_1,\cdots,a_n)$. 如果在复域 C 上，有如下的

定理 2.2.17（扩展定理） 对于给定的 $I=\langle f_1,\cdots,f_s\rangle\subset C[x_1,\cdots,x_n]$ 及消元理想 $I_1=I\cap C[x_2,\cdots,x_n]$, 对 $1\leqslant i\leqslant s$, 记 $f_i=g_i(x_2,\cdots,x_n)x_1^{k_i}+x_1$ 次数小于 k_i 之项, 其中 $k_i>0$ 且 $g_i\in K[x_2,\cdots,x_n]$ 非零. 设 $(a_2,\cdots,a_n)$ 为 I_1 的局部解（零点）, 如果存在 i 使 $g_i(a_2,\cdots,a_n)\neq 0$, 则存在 a_1 使 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 I 的解（零点）.

利用消元定理和扩展定理可以得到如下的两个推论：

推论 2.2.18 多项式组是矛盾的（即无解）当且仅当对应的 Gröbner 基包含常数.

推论 2.2.19 多项式组有有限复零点当且仅当由一字典序所得到的 Gröbner 基中，每个变元单独以主理想形式在某一多项式中出现.

在后面几章小扰动极限环的研究中， Gröbner 基在焦点量约化，焦点量最高阶数判定，中心必要条件的确定以及极限环构造方面将有广泛的应用.

2.3 吴 方 法

吴方法在自动推理的符号计算方面取得了巨大的成功．将吴整序原理、零

点结构定理以及零点分解定理用于 (参数系数以及常系数) 多项式方程求解也得到了众多的结果. 本书中 mrealroot 算法完全基于吴方法的多项式三角化思想. 为此, 我们给出吴方法的两个基本内容, 即吴整序原理和零点结构及分解定理. 吴方法利用多元多项式除法进行消元整序, 以获得三角多项式系统. 其思想是利用一元多项式除法的一个推广: 伪除法.

考虑多项式 $K[x_1,\cdots,x_n,y]$ 环上的两个多项式:

$$\begin{aligned} f &= a_l y^l + \cdots + a_1 y + a_0, \\ g &= b_m y^m + \cdots + b_1 y + b_0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中系数 a_i, b_i 为 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式. 假设 $l \geqslant m$, 类似一元多项式 (视为 y 的多项式) 的除法, 可以通过 f 减去 g 乘上一个适当的多项式消去首项 $a_l y^l$. 在 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 中, 当 $b_m \dagger a_l$ 时, 这是不可能的. 利用伪除法, 通过将 f 乘上 b_m 的一个次数来保证其初式 (首项系数) 可以被 b_m 整除, 此时再按一元多项式做除法.

定理 2.3.1 *假设 $f, g \in K[x_1,\cdots,x_n,y]$ 由 (2.4) 给出, $l \geqslant m$ 且 $g \neq 0$, 则*

i) 存在 $q, r \in K[x_1,\cdots,x_n,y]$ 使得 $b_m^s f = qg + r$, 其中 $s \geqslant 0$ 且 $r = 0$ 或 $\deg(r,y) < m$ ($\deg(r,y)$ 表示 r 关于 y 的次数);

ii) $r \in \langle f, g\rangle$.

算法如下:

INPUT $\quad f, g$

OUTPUT $\quad q, r$

BEGIN

  $r := f, q := 0$

  WHILE $r \neq 0$ AND $\deg(r,y) \geqslant m$ DO

    $r := b_m r - LC(r,y) g y^{\deg(r,y)-m}$

    $q := b_m q - LC(r,y) y^{\deg(r,y)-m}$.

  END WHILE

END

其中 $LC(r,y)$ 表 r 以 y 为变元的多项式的首项系数, 即初式. q 和 r 分别称为 f 除以 g 的伪商和伪余式.

由于最多需做 $l-m+1$ 次除法, 故可以选择幂次 s 满足 $s \leqslant l-m+1$. 如果不限制 s, 则 q 和 r 一般不是惟一的. 实际上, 如果除法是在系数属于有理数函数域 $K(x_1,\cdots,x_n)$ 而变元为 y 的多项式之间进行, 则可能出现分母. 而其分母即为除式 g 的初式 b_m 的一个 s 次幂, 去掉分母 b_m^s 即与伪除法所得结果一致.

以下的升列概念在吴方法中是基本的.

定义 2.3.2 多项式组

$$
\begin{aligned}
&f_1(u, x_1),\\
&f_2(u, x_1, x_2),\\
&\quad\vdots\\
&f_s(u, x_1, \cdots, x_s)
\end{aligned}
$$

称为是三角化多项式组，其中 $f_i \in K[u_1, \cdots, u_d, x_1, \cdots, x_i], i = 1, 2, \cdots, s$, $u = (u_1, \cdots, u_d)$ 为独立变量.

定义 2.3.3 多项式组 $F = \{f_1, \cdots, f_s\}$ 称为升列，如果

i) F 为三角化的，即每个 $f_i \in K[u_1, \cdots, u_d, x_1, \cdots, x_i]$, 主变元为 x_i;

ii) 对于 F 中的任意两个多项式 $f_i, f_j (i < j)$, 有 $\deg(f_j, x_i) < \deg(f_i, x_i)$, 即 f_j 对于 f_i 已经约化.

特别地，数域 F 中任意非零常数为升列，称为矛盾升列.

有了以上准备，我们给出吴方法的第一个重要的结果.

现在，我们考虑实数域上的 n 元多项式集 $(PS) = \{f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_s(x_1, \cdots, x_n)\}$, (PS) 的零点集合记为 $\mathrm{Zero}(PS)$. 如果 G 为非零多项式，则 $\mathrm{Zero}(PS)$ 使得 $G \neq 0$ 的子集记为 $\mathrm{Zero}(PS/G)$. 本文主要根据如下的整序原理给出确定多项式组实零点位置的算法.

定理 2.3.4（吴整序原理） 给定多项式组

$$(PS) = \{f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_s(x_1, \cdots, x_n)\}$$

存在一机械化算法，经有限步运算之后，可由多项式组 (PS) 得到或为非零常数或为一非矛盾升列（即特征列 (CS)）具有如下三角形式 (echolon):

$$
(CS)\qquad
\begin{aligned}
&c_1(u_1, \cdots, u_d; y_1),\\
&c_2(u_1, \cdots, u_d; y_1, y_2),\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&c_r(u_1, \cdots, u_d; y_1, \cdots, y_r).
\end{aligned}
$$

使得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Zero}(CS/I) \subset \mathrm{Zero}(PS) \subset \mathrm{Zero}(CS),\\
&\mathrm{Zero}(PS) = \mathrm{Zero}(CS/I) \bigcup \mathrm{Zero}(PS_i),
\end{aligned}
$$

其中 $u_1, \cdots, u_d; y_1, \cdots, y_r (d + r = n)$ 为 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个重排，$I = \prod_i I_i$（称为 C_i 的初式）为 C_i 作为 y_i 的多项式的首项系数之积. $(PS_i) = (PS) \bigcup \{I_i\}$.

三角化 (PS) 可通过不断地施行伪除法完成. 由上式可得 (PS) 和 (CS) 的零点关系. 即 (PS) 的零点为 (CS) 的零点. 反过来, (CS) 的不使 (CS) 的初式为零的零点必为 (PS) 的零点. 因此, 在所有初式非零的条件下, (PS) 与 (CS) 具有相同的零点. 当 (PS) 的零点使得某些 I_i 初式为零, 我们可以把 I_i 加到 (PS) 中得到多项式集 (PS_i). 进一步考虑 (PS_i) 和由 (PS_i) 三角化得到的 (CS_i), 最后可以得到零点的如下分解:

$$\mathrm{Zero}(PS) = \cup \mathrm{Zero}(CS_i/J_i),$$

其中 J_i 为 (CS_i) 中多项式初式之积.

我们考虑如下方程的实零点问题来说明吴整序的一个应用. 此方程出现在 n 种群 Lotka-Volterra 时滞系统全局稳定性的充要条件论证之中.

考虑矩阵

$$A(x) = \begin{pmatrix} -\sqrt{a_{11}^2+x^2} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & -\sqrt{a_{22}^2+x^2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \sqrt{a_{nn}^2+x^2} \end{pmatrix}.$$

需要证明其行列式为零: $\det A(x) = 0$ 仅有有限个实零点. 记 $x_i = \sqrt{a_{ii}^2+x^2}$ $(i=1,\cdots,n)$ 及 $F(x_1,\cdots,x_n) = \det A(x_1,\cdots,x_n)$, 我们得到如下关于 $x, x_1, \cdots, x_n$ 的多项式系统,

$$\begin{aligned} &x^2 - x_1^2 + a_{11}^2 = 0, \\ &x^2 - x_2^2 + a_{22}^2 = 0, \\ &\cdots\cdots \\ &x^2 - x_n^2 + a_{nn}^2 = 0, \\ &F(x_1,\cdots,x_n) = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

显然, 如果 x 为 $\det A(x) = 0$ 的根, 则必有 $x_1,\cdots,x_n$ 使得 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为 (2.5) 的根. 所以要证明 $\det A(x) = 0$ 实根个数的有限性, 只需证明 (2.5) 实根个数的有限性. 我们依次从 (2.5) 中消去 $x_2,\cdots,x_{n-1}$ 最后得到一三角化多项式列 (仅有变元 x, x_1, x_n):

$$\begin{aligned} &x^2 - x_1^2 + a_{11}^2 = 0, \\ &x^2 - x_n^2 + b_1 = 0, \\ &F_n(x_n) = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

$F_n(x_n)$ 为首项系数为 1 或 -1 的多项式. 又因为 $\mathrm{Zero}(2.4) \subset \mathrm{Zero}(2.5)$, 由 (2.6) 实根个数的有限性可知, 原多项式组实根个数有限.

数学问题的解决都是从条件到结论的推导，将数学问题化为多项式问题进行论证，即是由条件多项式 (组) 推出结论多项式 (组) 的过程. 利用吴整序原理可知，在某种意义上一个多项式组与其特征列是等价的 (具有共同的零点). 这样，可以考虑多项式 $g \in K[u_1, \cdots, u_d, x_1, \cdots, x_s]$ 在一给定的特征列 $F = \{f_1, \cdots, f_s\}, f_i \in K[u_1, \cdots, u_d, x_1, \cdots, x_i], i = 1, 2, \cdots, s$(的某些分支) 的零点上是否为零的问题.

这可以利用定理 2.3.1 中的伪除法，以 f_s 除 g(视为 x_s 的多项式), 则有

$$R_{s-1} = d_s^{t_s} g - q_s f_s.$$

将 R_{s-1}(视为 x_{s-1} 的多项式) 对于 f_{s-1} 做伪除法：

$$R_{s-2} = d_{s-1}^{t_{s-1}} R_{s-1} - q_{s-1} f_{s-1} = d_{s-1}^{t_{s-1}} d_s^{t_s} g - q_{s-1} f_{s-1} - d_{s-1}^{t_{s-1}} g_s f_s,$$

一直下去可得

$$R_0 = I_1^{t_1} \cdots I_s^{t_s} g - (A_1 f_1 + \cdots + A_s f_s),$$

其中 $A_1, \cdots, A_s \in K[u, x_1, \cdots, x_s]$, 而 $I_1, \cdots, I_s$ 分别为 $f_1, \cdots, f_s$ 的初式.

这样，我们就得到了吴方法的第二个重要结论.

定理 2.3.5 *对于如上的 $g, f_1, \cdots, f_s$ 及对应的初式 $I_1, \cdots, I_s$ 存在整数 $t_1, \cdots, t_s$ 及多项式组 $A_1, \cdots, A_s \in K[u, x_1, \cdots x_s]$ 使得*

$$I_1^{t_1} \cdots I_s^{t_s} g = A_1 f_1 + \cdots + A_s f_s + R_0.$$

如果余式 R_0 为零，则在条件 $I_i \neq 0 (i = 1, \cdots, s)$ 下，由 $f_i = 0 (i = 1, \cdots, s)$ 可推出 $g = 0$.

2.4 结　式

前面两节中， Gröbner 基法 (特别以字典序) 和吴方法都是多元多项式消元的常用方法. 特别地，吴方法给出的特征列和以字典序给出 Gröbner 基都是具有某种三角形式. 至少在理论上，我们可以通过逐次反代来求解整个系统. 而本节将介绍的结式方法是另一个多元多项式消元方法. 从效率上考虑，结式消元法在多项组无解的论证方面特别有效. 结式方法还可以用于判定两个给定的多元多项式是否存在公因子.

消元理论涉及从一个多项式系统消去一个或多个变元的问题. 它将一给定的系统进行约化而得到一个方程个数及变元个数都更少，而其零点在某种意义上相同的系统.

例如，我们考虑如下多项式系统

$$
\begin{aligned}
f_1 &= a_2x^2 + a_1x + a_0,\\
f_2 &= b_2x^2 + b_1x + b_0,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

其中 $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$. 消去 f_1 和 f_2 中的 x 可以得到

$$g = a_0^2b_2^2 - a_0a_1b_1b_2 - 2a_0a_2b_0b - 2 + a_0a_2b_1^2 + a_1^2b_0b_2 - a_1a_2b_0b_1 + a_2^2b_0^2.$$

g 即为 (2.7) 的 Sylvester 结式. $g=0$ 当且仅当 (2.7) 有公共复根.

消去 (2.7) 中的 x 也可以通过 Gröbner 基方法实现 (2.2). 考虑七个变量构成的多项式理想 $\langle f_1, f_2\rangle$ 以 $x \succ a_0 \succ a_1 \succ a_2 \succ b_0 \succ b_1 \succ b_2$ 为序，计算字典序下的约化 Gröbner 基 G, 则 G 由六个多项式构成. 属于消元理想 $G \cap Q[a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2]$ 的惟一多项式即为 g.

利用吴方法消去 (2.7) 中的 x, 可以出现两种情形. 记 $PS_1 = \{f_1, f_2\}$, 则以 $x \succ a_2$ 消元得到 $CS_1 = \{\bar{f}_1, b_2g\}$ 及初式 I. 若以 $x \succ b_2$ 消元得到 $CS_2 = \{\bar{f}_2, a_2g\}$ 及初式 I. 因为 $a_2b_2 \neq 0$, 所以最终结果是完全相同的. 特别的，当初式 I=0 时， f_1 和 f_2 有公根当且仅当 a_2, a_1, a_0 与 b_2, b_1, b_0 成比例. 这显然已经包含在 $g=0$ 之中.

下面我们讨论多项式的不可约性.

定义 2.4.1 K 为域，多项式 $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 称为在 K 上不可约，如果 f 不为常数且不为 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 中两个非常数多项式之积.

显然，不可约性依赖于域 K. 例如， x^2+1 在 Q 和 R 上不可约，但在 C 上有 $x^2+1=(x+i)(x-i)$.

定理 2.4.2 假设 $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 在 K 上不可约，且 f 整除 gh $(g, h \in K[x_1, \cdots, x_n])$, 则 f 整除 g 或 h.

由定义 2.4.1 和定理 2.4.2, 容易得到

定理 2.4.3 (惟一分解定理) $K[x_1, \cdots, x_n]$ 中的每个非常数多项式 f 可以写成 K 上的不可约多项式 $f_i (i=1, \cdots, r)$ 之积，即 $f = f_1f_2\cdots f_r$. 如果 $f = g_1g_2\cdots g_s$, 且 $g_i (i=1, \cdots, s)$ 在 K 上不可约，则 $r=s$, 且在适当排列后 g_i 与 f_i 仅相差一个常数因子.

关于多元多项式的公因式，有

定理 2.4.4 假设 $f, g \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 关于 x_1 有正次数，则 f 和 g 在 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 有关于 x_1 正次数的公因式当且仅当 f 和 g 在 $K(x_2, \cdots, x_n)[x_1]$ 中有公因式.

这里 $K(x_2, \cdots, x_n)$ 表示 K 上关于 $x_2, \cdots, x_n$ 的有理函数域.

在一元多项式情形， $f, g \in K[x]$ 的公因式可以通过 (理论上) 分别分解 f 和 g 成不可约因式而得到．或更有效的，利用欧氏方法计算 f 和 g 的 GCD 而得到．本节中的结式方法提供了另一种寻求公因式的方法.

推论 2.4.5 设 $f, g \in K[x]$ 次数分别为 $l > 0$ 和 $m > 0$, 则 f 和 g 有公因式当且仅当存在非零的次数不超过 $m-1$ 和 $l-1$ 的多项式 $A, B \in K[x]$, 使得

$$Af + Bg = 0.$$

实际上， A 和 B 的存在性可以化为线性方程组的可解性．首先假设 f 和 g 分别为

$$\begin{aligned} f &= a_l x^l + a_{l-1} x^{l-1} + \cdots + a_0, \qquad & a_l \neq 0 \\ g &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0, \qquad & b_m \neq 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $a_i, b_j \in K$. 再假设 A 和 B 分别为

$$\begin{aligned} A &= c_{m-1} x^{m-1} + c_{m-2} x^{m-2} + \cdots + c_0, \\ B &= d_{l-1} x^{l-1} + d_{l-2} x^{l-2} + \cdots + d_0, \end{aligned}$$

且视其中的系数 $c_{m-1}, \cdots, c_0, d_{l-1}, \cdots, d_0$ 为未知数. 现在我们要找出 $c_i, d_j \in K$, 使得

$$Af + Bg = 0. \tag{2.9}$$

将 A, B, f 和 g 带入 (2.9), 再比较 x 同次项的系数，则可得到以 a_i, b_j 为系数，以 c_i, d_j 为变量的线性方程组

$$\begin{array}{lclr} a_l c_{m-1} & + & b_m d_{l-1} & = 0 \\ a_{l-1} c_{m-1} + a_l c_{m-2} & + & b_{m-1} d_{l-1} + b_m d_{l-2} & = 0 \\ \quad\ddots & & \quad\ddots & \\ \qquad a_0 c_0 + & & \qquad b_0 d_0 & = 0. \end{array} \tag{2.10}$$

由此线性方程组，我们给出如下的定义.

定义 2.4.6 考虑由 (2.7) 给出的 $K[x]$ 中的多项式 f 和 g. f 和 g 关于 x

的 Sylvest 矩阵 $\mathrm{Syl}(f,g,x)$ 为系统 (2.10) 的系数矩阵，即

$$\mathrm{Syl}(f,g,x)=\underbrace{\begin{pmatrix} a_l & & & b_m & & \\ a_{l-1} & a_l & & b_{m-1} & b_m & \\ a_{l-2} & a_{l-1} & \ddots & b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots \\ \vdots & & \ddots\ a_l & \vdots & & \ddots\ b_m \\ \vdots & & \ddots\ a_{l-1} & \vdots & & \ddots\ b_{m-1} \\ a_0 & & & b_0 & & \\ & a_0 & \vdots & & b_0 & \vdots \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & a_0 & & & b_0 \end{pmatrix}}_{m\text{列} \quad\quad\quad l\text{列}}$$

而 f 和 g 关于 x 的结式 Res(f,g,x) 为 $\mathrm{Syl}(f,g,x)$ 的行列式：

$$\mathrm{Res}(f,g,x)=\det(\mathrm{Syl}(f,g,x)).$$

这样，我们就得到了系统 (2.10) 有解的充要条件. 因系统 (2.10) 有 $l+m$ 个方程和 $l+m$ 个变量，故其有非零解当且仅当其系数矩阵的行列式为零：

$$\mathrm{Res}(f,g,x)=0.$$

进一步，有如下的：

定理 2.4.7 设 $f,g\in K[x]$, 则 $\mathrm{Res}(f,g,x)\in K$ 是一个以 f 和 g 的系数为变元的整系数多项式 (所有系数为整数). f 和 g 在 $K[x]$ 中有公因式当且仅当 $\mathrm{Res}(f,g,x)=0$.

特别地，如取 $K=C$, 则有

推论 2.4.8 如果 $f,g\in C[x]$, 则 $\mathrm{Res}(f,g,x)=0$ 当且仅当 f 和 g 在 C 中有公根.

该推论表明，在结式为零时， f 和 g 必有复公根. 但可以无实公根. 实公根的判定是一个有意义的课题. 利用实根分离算法可以判定一个常系数多项式系统的实公根问题 (参阅第 3 章).

结式可以推广到多元多项式的情形. 考虑 n 变元多项式 $f,g\in K[x_1,\cdots,x_n]$ 记为

$$f=a_lx_1^l+\cdots+a_0,$$
$$g=b_mx_1^m+\cdots+b_0,$$

其中 $a_i, b_j \in K[x_2, \cdots, x_n], a_l b_m \neq 0$. f 和 g 关于 x_1 的结式为

$$\mathrm{Res}(f,g,x_1) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_l & & & b_m & & \\ a_{l-1} & a_l & & b_{m-1} & b_m & \\ a_{l-2} & a_{l-1} & \ddots & b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots \\ \vdots & & \ddots\ a_l & \vdots & & \ddots\ b_m \\ \vdots & & \ddots\ a_{l-1} & \vdots & & \ddots\ b_{m-1} \\ a_0 & & & b_0 & & \\ & a_0 & \vdots & & b_0 & \vdots \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & a_0 & & & b_0 \end{pmatrix}}_{m\text{列}\qquad\qquad l\text{列}}$$

类似于一元多项式情形，有

定理 2.4.9 设 $f, g \in K[x_1, \cdots, x_n]$ (均含变元 x_1), 则

i) $\mathrm{Res}(f,g,x_1)$ 属于第一消元理想 $\langle f,g\rangle \bigcap K[x_2, \cdots, x_n]$.

ii) $\mathrm{Res}(f,g,x_1) = 0$, 当且仅当 f, g 在 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 中含有 x_1 的公因式.

利用此定理可以确定一组多项式 $f_1, \cdots, f_n \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 无公根. 例如考虑三元多项式组

$$\{f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3,), f_3(x_1,x_2,x_3)\}$$

不妨设它们均含有变元 x_1, x_2, x_3, 否则只需要减少某些求结式的步骤即可.

算法 2.4.10 第一步：我们先确定一个序 $x_1' \prec x_2' \prec x_3'$(它是 x_1, x_2, x_3 的某一排列), 把 f_1, f_2, f_3 根据 x_1' 的次数从低到高排列 (这样排列是为了减少计算复杂度), 记为 $[f_1', f_2', f_3']$;

第二步：求 f_1 分别与 f_2 和 f_3 关于 x_1' 的结式：

$$r_{21}(x_2', x_3') = \mathrm{Res}(f_2', f_1', x_1'), \qquad r_{31}(x_2', x_3') = \mathrm{Res}(f_3', f_1', x_1').$$

r_{21}, r_{31} 是只含变元 x_2', x_3' 的多项式.

第三步：确定一个序 $x_2'' \prec x_3''$(它是 x_2', x_3' 的某一排列), 求结式：

$$r_{32}(x_3'') = \mathrm{Res}(r_{31}(x_2', x_3'), \qquad r_{21}(x_2', x_3'), x_2'').$$

则 $r_{32}(x_2', x_3')$ 只含变元 x_3''. 如果 r_{32} 无实根，我们就得到多项式组 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 无公实根.

在上面的过程中，确定序关系是很重要的，它不仅影响计算的复杂度，对结果也是有影响的. 例如在第三步中，如果求 $\mathrm{Res}(r_{31}, r_{21}, x_3'')$, 将得到一个只有变元 x_2'' 多项式 (记为 r_{32}'), 它与 r_{32} 又无实根的可能组合就有：

1） 都有；

2） 都无；

3） r_{32} 有，r_{32}' 无；

4） r_{32} 无，r_{32}' 有.

不过，对我们考虑有无公实根而言，不管以什么序，只要找到有一个最后的结果无实根就行了.

对超过三个多项式的多项式组，同样可做类似的处理. 实际上，上面求结式的过程也是一个三角化过程. 但因为这样得到的三角化序列与原多项式组不等价，所以我们在后面的章节中一般不用此法对多项式组进行三角化. 但它在判定多项式组无公根这方面还是非常有效的.

当结式为零时，如何判定一个给定的多项式组无实公根的问题将在第三章讨论.

注 释

本章的 2.1 节和 2.2 节的内容取自 [18, 19] 及 [20]. 2.3 节取自吴文俊 [73] 及 [18], 其中例子属于 [44]. 2.4 节参考了 [18] 及 [63].

第三章　实根分离算法

本章讨论一般的有理多项式系统的实根分离算法，这是本书的重点．我们先从一元有理系数多项式入手，给出寻求其所有实根分离区间的完全算法，然后将其推广到多元多项式系统.

3.1　一元多项式的实根分离算法

我们考虑整系数的一元多项式 (有理系数多项式均可通过去分母化成整系数多项式)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{3.1}$$

定义 3.1.1　(3.1) 中多项式 $f(x)$ 的实根 $\overline{x}$ 称为是 (区间) 分离的，如果存在有理数 a 和 b 使得 $a \leqslant \overline{x} \leqslant b$, 且区间 $[a,b]$ 中有且仅有 $f(x)$ 的一个根 (重根算一个). 此时称 $[a,b]$ 为 $\overline{x}$ 的分离区间.

在一给定区间内，多项式 $f(x)$ 相异实根的个数可通过 Sturm 定理来判定.

定义 3.1.2　假设 $f(x)$ 无重因式 (否则我们可以先除以它和它的导式的最大公因式), 有理系数的多项式序列

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= f(x), \\
f_1(x) &= f'(x), \\
f_2(x) &= -\mathrm{rem}(f_0(x), f_1(x)), \\
&\vdots \\
f_k(x) &= -\mathrm{rem}(f_{k-2}(x), f_{k-1}(x))\ (k \leqslant n, \quad f_n(x)\text{为常数})
\end{aligned}$$

称为 $f(x)$ 的 Sturm 序列. 其中 rem 表示前一个多项式除以后一个多项式的余式.

对于常数序列 $A = a_0, a_1, \cdots, a_k$($a_i$ 非零 $i = 0, \cdots, k$), 其符号的变号数记为 Var(A). 例如，当 $A = 1, -2, 3, 3, -4, 6, 7$ 时，其变号数 Var(A)=4. 这样，如果记 $f(x)$ 的 Sturm 序列为 $S(f(x))$, 则当实数 y 不是 $f(x)$ 的根时，在 y 点处，Var(S($f(y)$)) 为序列 $f_0(y), f_1(y), \cdots, f_n(y)$ 的变号数.

定理 3.1.3 (Sturm 定理) *假设 $f(x)$ 无重因子，$a,b(a<b)$ 为两实数，且均不是 $f(x)$ 的根，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内的实根个数等于*

$$\operatorname{Var}(S(f(a)))-\operatorname{Var}(S(f(b))).$$

特别地，a 和 b 可以分别取为 $-\infty$ 和 $+\infty$. 此时，$\operatorname{Var}(S(f(+\infty)))$ 为 Sturm 序列中多项式的首项系数的符号变号数，而 $\operatorname{Var}(S(f(-\infty)))$ 为 Sturm 序列中将奇次多项式变号后的所有多项式首项系数的符号变号数. 即在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 的实根个数完全由 Sturm 序列的首项系数的符号所决定.

与此类似的有下面定理：

定理 3.1.4 (Decartes 符号法则) *实系数多项式 $f(x)$ 的正根个数 (l 重根以 l 个计算), 等于 $f(x)$ 的系数组的变号数或比这个数少一个正偶数.*

显然， Decartes 符号法则比较 Sturm 结论为弱，判别条件更易验证. 特别在如下两种情形， Decartes 符号法则给出了正实根性态的准确结果 (其中 $\operatorname{coeff}(f(x))$ 表示 $f(x)$ 的系数构成的序列).

推论 3.1.5 *如果 $\operatorname{Var}(\operatorname{coeff}(f(x)))=0$, 则 $f(x)$ 无正实根.*

推论 3.1.6 *如果 $\operatorname{Var}(\operatorname{coeff}(f(x)))=1$, 则 $f(x)$ 有且仅有一个正实根.*

利用 Sturm 定理及特殊情况下的 Decartes 符号法则可以确定一个多项式实根个数及重数的完整定性性质. 但在实际问题中，我们往往需要给出一个整系数多项式的实根分布的 (尽可能的) 准确位置. 这可以通过找出各个实根的分离区间 (定义 3.1.1) 来完成.

为了能分离出包含孤立实根的区间，我们首先给出一个包含所有实根的区间. 等价地，即找出所有实根的绝对值的一个上界.

定理 3.1.7 *假设 y 为 $f(x)$ 的实根，则*

$$|y|\leqslant 1+\max\left(\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|,\cdots,\left|\frac{a_0}{a_n}\right|\right).$$

定理 3.1.8 *假设 y 为 $f(x)$ 的实根，则*

$$|y|\leqslant \max\left(\left|\frac{na_{n-1}}{a_n}\right|,\left|\frac{na_{n-2}}{a_n}\right|^{1/2},\cdots,\left|\frac{na_0}{a_n}\right|^{1/n}\right).$$

定理 3.1.9 *假设 y 为 $f(x)$ 的实根，则*

$$|y|\leqslant 2\max\left(\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|,\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|^{1/2},\cdots,\left|\frac{a_0}{a_n}\right|^{1/n}\right).$$

在常数项不为零的情形，如上每个定理也给出了 $f(x)$ 的根的最小绝对值．这只需在多项式中将 x 换为 $1/x$ 即可，因为 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的绝对值最大的根即为 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n+1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的绝对值最小的根．

另一方面，整系数多项式 $f(x)$ 的实根间的距离由 $f(x)$ 的系数完全决定，即有如下的

定理 3.1.10 假设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为一整系数多项式， $y_1,y_2,\cdots,y_k(k\geqslant 2)$ 为 $f(x)$ 在 R 上的所有相异实根，则

$$\min_{i,j\in\{1,\cdots,k\}}|y_i-y_j|>\frac{1}{n^{n+1}\left(1+\sum_{l=0}^{n}|a_l|\right)}.$$

结合上面这些定理，我们可以用下面的算法得到一元有理系数多项式 $f(x)$ 的实根分离区间．下面简记 $\mathrm{Var}(S(f(a)))=V_a$．

```
INPUT      f(x)
OUTPUT     f(x) 的所有实根分离区间： [a_1,b_1],···,[a_N,b_N]
BEGIN
    f := f/GCD(f,f')          /* 注 1
    S :=Sturm(f,f')
    a := -||f||;   b := ||f||        /* 注 2
    N := V_a(S) - V_b(S)
    IF N = 0 THEN RETURN ∅ END IF
    i := 1;
    a_i := a;   b_i := b;
    G := ∅
    WHILE i ⩽ N DO        /* 注 3
        WHILE V_{a_i}(S) - V_{b_i}(S) > 1 DO        /* 注 4
            c := (a_i + b_i)/2
            IF V_{a_i}(S) - V_c(S) ⩾ 1
                THEN b_i := c
                ELSE a_i := c
            END IF
        END WHILE
        G := G union [a_i,b_i]        /* 注 5
        i := i + 1;
```

$a_i := b_{i-1}$; $b_i := b$

END WHILE

RETURN G

END

注 1 采用除以 f 和它的导式 f' 的最大公因式方法去掉重因子.

注 2 根据定理 3.1.7 得到 $f(x)$ 的根的上下界.

注 3 从左 (a) 到右 (b) 逐个寻找出 $f(x)$ 的所有实根分离区间 $[a_i, b_i]$.

注 4 如果在 $[a_i, b_i]$ 里面不只一个实根，再折半取区间 ($[a_i, c]$ 优先), 直到只有一个实根为止.

注 5 $[a_i, b_i]$ 即为 $f(x)$ 的一个实根分离区间，把它并入 G.

在这个算法中，还可以对分离区间的长度 (精度) 进行限制，并且可以要求区间的端点是同号的，这继续利用二分法是不难得到的. 数学软件 MAPLE 中有一个函数 realroot(), 它就是根据该算法求出任意一元有理多项式的所有实根分离区间. 调用方式如下：

> readlib(realroot):/* 调出函数包

> realroot(一元多项式，精度);

此处“ > ”为 MAPLE 的引导符，“精度 ”表示所得实根分离区间允许的最大长度.

例如，利用精度分别为 $\frac{1}{5}$ 和 $\frac{1}{10^5}$ 求多项式 $3x^3 - \frac{2}{3}x$ 的实根分离区间：

> readlib(realroot) :

> realroot$(3x^3 - \frac{2}{3}x, \frac{1}{5})$;

$$\Big[\big[0,0\big], \Big[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\Big], \qquad \Big[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\Big]\Big]$$

> realroot$(3x^3 - \frac{2}{3}x, \frac{1}{10^5})$;

$$\Big[\big[0,0\big], \Big[\frac{61787}{131072}, \frac{15447}{32768}\Big], \qquad \Big[-\frac{15447}{32768}, \frac{61787}{131072}\Big]\Big]$$

实际上，由这种分离区间也可得到多项式的近似解. 只需取根区间的左或右区间，或者取二者的平均值即可.

3.2 多元多项式的实根分离算法

现在把上一节求一元多项式的实根分离算法推广到零维多元多项式系统. 基本思想是这样的：对一个多项式系统 (变元数与多项式个数相同)

$$\{f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\},$$

首先对它进行三角化 (参看 2.3 节), 得到如下的三角化多项式

$$\{g_1(u_1), g_2(u_1, u_2), \cdots, g_n(u_1, u_2, \cdots, u_n)\}$$

和初式

$$\{I_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, I_s(u_1, \cdots, u_n)\},$$

其中 $u_1, \cdots, u_n$ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个排列；利用上一节的一元多项式的实根分离算法求出 $g(u_1)$ 关于 u_1 的实根分离区间；再根据极大极小多项式估计 (我们马上就会介绍) 依次求出 $g_k(u_1, \cdots, u_k), k = 2, \cdots, n$ 关于 u_k 的实根分离区间；最后，再次根据极大极小多项式估计结论，判定初式 $\{I_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, I_s(u_1, \cdots, u_n)\}$ 在每组根下是否不为零. 使得初式不为零的根区间即为所求.

我们首先介绍几个关于多项式估计的结论.

为了叙述简洁，我们在本节中只考虑多项式系统在 R_+^n 区域的情况，在其他区域时，对部分变元做 $x_i \to -x_i$ 的变换后，均可转化到 R_+^n 上.

对于给定的多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 我们分别用 $f^+(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $f^-(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 f 中正项与负项之和，则有 $f = f^+ + f^-$. 下面的定理是显然的：

定理 3.2.1 对变元 $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 以及给定的 $0 < a \leqslant b$, 当 $x_i \in [a, b]$ 时，恒有

$$f^+(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_n) + f^-(x_1, \cdots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

$$\leqslant f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

$$\leqslant f^+(x_1, \cdots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \cdots, x_n) + f^-(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_n).$$

这利用 f^+, f^- 在 R_+^n 上的单调性不难证明. 显然，把它推广到多个变元也成立，即

定理 3.2.2 对变元 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$, 及给定的 $0 < a_{i_j} \leqslant b_{i_j}$ $(1 \leqslant i_j \leqslant n, j = 1, \cdots, k)$, 当 $x_{i_j} \in [a_{i_j}, b_{i_j}]$ 时，恒有

$$\begin{aligned} & f^+(x_1, \cdots, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}, \cdots, x_n) + f^-(x_1, \cdots, b_{i_1}, \cdots, b_{i_k}, \cdots, x_n) \\ \leqslant\ & f(x_1, \cdots, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}, \cdots, x_n) \\ \leqslant\ & f^+(x_1, \cdots, b_{i_1}, \cdots, b_{i_k}, \cdots, x_n) + f^-(x_1, \cdots, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

自然地，考虑所有变量 $\{x_1, \cdots, x_n\}$, 则有

定理 3.2.3 对给定的 $0 < a_i \leqslant b_i$ $(i=1,\cdots,n)$, 有

i) 若 $f^+(a_1,a_2,\cdots,a_n)+f^-(b_1,b_2,\cdots,b_n)>0$, 则当 $x_i\in[a_i,b_i]$ $(i=1,\cdots,n)$ 时, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$;

ii) 若 $f^+(b_1,b_2,\cdots,b_n)+f^-(a_1,a_2,\cdots,a_n)<0$, 则当 $x_i\in[a_i,b_i]$ $(i=1,\cdots,n)$ 时, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)<0$.

我们求三角化的多元多项式的实根分离区间及判定初式是否不为零，主要就是依据这三个定理．注意到，判别初式是否为零的算法对任意的以 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 为变元的多项式都是适用的.

为了便于叙述,我们设 (P) 是三元多项式组 $\{f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)\}$, 并已得到三角多项式组 (C): $\{g_1(x),g_2(x,y),g_3(x,y,z)\}$ 和初式 $I(x,y,z)=\prod I_i(x,y,z)$. 我们的基本假设是:

i) 三角多项式组 (C) 的实根使得初式 $I(x,y,z)$ 不为零，这可由多项式组的不可约分解算法判定或利用本文的极大极小多项式判定;

ii) 三角多项式组 (C) 无重根，这可由 3.3 节中的多项式组的不可约分解算法解决.

对算法中用到的概念和定理，我们说明如下:

数学软件 MAPLE 中的 realroot 算法以指定的精度 c 为最大区间长度，以区间的形式给出一个单变元多项式的实根．即，调用命令 realroot$(g_1(x),c)$, 可以得到包含 $g_1(x)$ 的所有实根的分离区间集 $[a_1,b_1],\cdots,[a_n,b_n]$, 其中，任一区间中有且仅有一个实根，任意两个区间不相交，且 a_i,b_i 同号.

定义 3.2.4 $g_2(x,y)$ 在 $g_1(x)$ 的实根分离区间 $[a_1,b_1]$ 上的极大极小多项式 $\overline{g}_2(y)$ 和 $\underline{g}_2(y)$ 分别由下式给出:

$$\overline{g}_2(y)=g_2^+(b_1,y)+g_2^-(a_1,y),$$

$$\underline{g}_2(y)=g_2^+(a_1,y)+g_2^-(b_1,y).$$

显然，若 $\overline{x}\in[a_1,b_1]$ 为 $g_1(x)$ 的实根，则必有 $\underline{g}_2(y)\leqslant g_2(\overline{x},y)\leqslant\overline{g}_2(y)$.

定理 3.2.5 对于上述的 $\overline{g}_2(y)$ 和 $\underline{g}_2(y)$, 存在常数 c_1, 当 $b_1-a_1<c_1$ 时,

i) $\overline{g}_2(y),\underline{g}_2(y)$ 的首项系数同号;

ii) $\overline{g}_2(y),\underline{g}_2(y)$ 的实根个数相同.

证明 因为当 $a_1\to\bar{x}$, $b_1\to\bar{x}$ 时, $\underline{g}_2(y)\to g_2(\bar{x},y)$, $\overline{g}_2(y)\to g_2(\bar{x},y)$. 而 $g_2(\bar{x},y)$ 是关于 y 的无重根的多项式，故存在关于 $\bar{x}$ 的小扰动，使得扰动后的多项式其首项系数及实根个数与 $g_2(\bar{x},y)$ 相同.

定理 3.2.6 对于没有公共根的 $\overline{g}_2(y),\underline{g}_2(y)$, 存在常数 c_2, 以 c_2 为精度，由

realroot 算法得到的 $\overline{g}_2(y), \underline{g}_2(y)$ 的实根分离区间序列

$$List_1 := [[c_{11}, d_{11}], \cdots, [c_{1n}, d_{1n}]],$$

$$List_2 := [[c_{21}, d_{21}], \cdots, [c_{2n}, d_{2n}]]$$

满足： $[c_{1i}, d_{1i}] \cap [c_{2j}, d_{2j}] = \phi\ (i, j = 1, \cdots, n)$. 即，可以将 $List_1, List_2$ 中的所有的实根分离区间排序.

证明 事实上，一个整系数多项式 $f(x)$ 的实根间的距离由 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 的系数 $a_i (i = 1, \cdots, n)$ 完全决定. 假设 $y_1, y_2, \cdots, y_k (k \geqslant 2)$ 为 $f(x)$ 的所有相异实根，则由定理 3.1.10, 有

$$\min_{i,j \in \{1,\cdots,k\}} |y_i - y_j| > \frac{1}{n^{n+1}\left(1 + \sum_{l=0}^{n} |a_l|\right)}.$$

这样，我们可以考虑 $\overline{g}_2(y)$ 和 $\underline{g}_2(y)$ 的乘积多项式 $\overline{g}_2(y)\underline{g}_2(y)$ 的实根之间的最小距离，令 c_2 等于这个最小距离，结合定理 3.2.5 可知定理 3.2.6 成立.

注 当 $\overline{g}_2(y)$ 和 $\underline{g}_2(y)$ 有公根时，可先求其最大公因子，再分离实根.

定义 3.2.7 $\overline{g}_2(y), \underline{g}_2(y)$ 称为关于精度 c 实根区间可匹配，如果存在 c 使得

i) 实根分离区间序列 $List_1, List_2$ 中的区间排序属于下列序之一：

a) 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, $\cdots$, 1, 2, 2, 1;

b) 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, $\cdots$, 1, 2, 2, 1, 1, 2;

c) 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, $\cdots$, 2, 1, 1, 2;

d) 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, $\cdots$, 2, 1, 1, 2, 2, 1,

其中 1 代表实根区间属于 $List_1$, 2 代表实根区间属于 $List_2$. 相应的， a), c) 是出现偶数个实根时的情形； b), d) 是出现奇数个实根时的情形. 特别的，当只有一个实根时， b) 为 1,2; d) 为 2,1.

ii) 在每一个所求得的实根分离区间， $g_2(\bar{x}, y)$ 单调.

由多项式对其变元的连续性，我们有如下的

定理 3.2.8 考虑三角组 $\{g_1(x),\ g_2(x, y)\}$, 当 $g_1(x)$ 在 $[a_1, b_1]$ 上的实根 $\bar{x}$ 使得 $I(\bar{x}) \neq 0$, 且 $g_2(\bar{x}, y)$ 无重根时，存在常数 c, 使得 $\overline{g}_2(y)$ 和 $\underline{g}_2(y)$ 关于精度 c 实根区间可匹配.

证明 事实上，由于多项式 $g_2(\bar{x}, y)$ 没有重根. $g_2(\bar{x}, y)$ 在其 (关于 y 的) 实根处总是穿过 y 轴的. 当 $a, b \to \bar{x}$, 即 $c \to 0$ 时， $\overline{g}_2(y), \underline{g}_2(y) \to g_2(\bar{x}, y)$, 即 $\overline{g}_2(y), \underline{g}_2(y)$ 也在 $g_2(\bar{x}, y)$ 的邻域内穿过 y 轴. 故由定理 3.2.5 和定理 3.2.6 可知,

通过提高 c_1 的精度, 即让 b_1-a_1 足够小, 使得 $\overline{g}_2(y)$ 和 $\underline{g}_2(y)$ 的分离区间序列 $List_1$ 和 $List_2$ 具有定义 3.2.7 中的 a), b), c) 或 d) 之一形式.

又考虑 $g_2(\bar{x},y)$ 关于 y 的偏导数 $g_{2y}^{'}(\bar{x},y)$, 由极大、极小多项式定义有 $\underline{g}_{2y}^{'}(y)\leqslant g_{2y}^{'}(\bar{x},y)\leqslant \overline{g}_{2y}^{'}(y)$. 显然对于充分小的 $|a_1-b_1|$ (区间 (a_1,b_1) 的长度 $<c_1$), $\underline{g}_{2y}^{'}(y)$ 和 $\overline{g}_{2y}^{'}(y)$ 具有相同符号.

从而由定理 3.2.5 和定理 3.2.6, 可选取 $c=\min\{c_1,c_1^{'}\}$, 使得 $\overline{g}_2(y)$ 和 $\underline{g}_2(y)$ 关于精度 c 实根区间可匹配.

具体的算法如下:

算法 3.2.9

第一步, 利用 realroot 算法求出 $g_1(x)$ 的实根分离区间 (如前面所述, 我们只考虑正区间), 其中, 精度 c_1 由多项式实根最小距离给出. 为叙述方便, 任取实根分离区间中一个, 记为 $[a_1,b_1]$.

第二步, 得到 $g_2(x,y)$ 只有变元 y 的极大极小多项式 $\{\overline{g}_2(y),\underline{g}_2(y)\}$, 利用 realroot 算法分别求出 $\overline{g}_2(y),\underline{g}_2(y)$ 的实根分离区间 $List_1$, $List_2$ (精度 c_2 由 $\overline{g}_2(y)\underline{g}_2(y)$ 的实根之间最小距离给出).

第三步, 将 $List_1$, $List_2$ 排序, 判断 $\overline{g}_2(y),\underline{g}_2(y)$ 是否关于 $c=\min\{c_1,c_2\}$ 有定义 3.2.7 中的 a), b), c), d) 之一序, 如果是, 进入第四步; 否则, 以 $c_1/10$ 为精度, 返回第一步. 由定理 3.2.8, 有限步内必出现 a), b), c), d) 之一序.

第四步, 根据定理 3.2.3, 验证所求实根区间的多项式的导式在所求得的区间上的正负性. 如果恒正或恒负, 则原多项式在该区间内单调, 所以实根惟一; 否则提高精度, 返回第一步.

第五步, $\overline{g}_2(y)$ 和 $\underline{g}_2(y)$ 是关于精度 c 实根区间可匹配的, 按如下规则进行匹配: $a_{2i}:=\min\{c_{1i},c_{2i}\},b_{2i}:=\max\{d_{1i},d_{2i}\}$ $(i=1,\cdots,n)$, 显然, 在每个 $[a_1,b_1]\times[a_{2i},b_{2i}]$ 中, 存在 $\{g_1(x),g_2(x,y)\}$ 的惟一实根.

第六步, 假定 $G=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ 已经是 $\{g_1(x),g_2(x,y)\}$ 的实根分离区间. 用相似于第二步的处理方式, 得到 $g_3(x,y,z)$ 只有变元 z 的极大极小多项式 $\{\overline{g}_3(z),\underline{g}_3(z)\}$:

$$\overline{g}_3(z)=g_3^{+}(b_1,b_2,z)+g_3^{-}(a_1,a_2,z),$$

$$\underline{g}_3(z)=g_3^{+}(a_1,a_2,z)+g_3^{-}(b_1,b_2,z).$$

第七步, 再按照第三、四、五、六步的方法, 得到 $\{g_1(x),g_2(x,y),g_3(x,y,z)\}$ 的实根分离区间 $G=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$.

第八步, 根据定理 3.2.3, 判定 $I(x,y,z)$ (实际上 , 任何不含有其他未知元的多项式均可以) 在 G 下的正负. 若属于定理 3.9 的 i) 或 ii), 则 G 也就是 $\{f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)\}$ 的实根分离区间.

在上面的步骤中，只要依次考虑由一、三、七步得出的所有区间，即可得到所需的实根分离区间组.

由以上结论可以看出，对于无重根的三角化多项式组，可以利用极大极小多项式将其实根区间分离. 这样，可以保证每个区间内有且仅有一个实根 (精度 c 充分小). 此时，实根分离算法的意义是：分离区间之外必无实根，而区间内有且仅有一个实根.

由于多项式组的三角化过程相对独立，而且已有了通用的算法 (如吴方法)，因此我们在求多项式组的实根分离区间时，可以先进行三角化处理，再接着进行下面的操作.

从第一步到第七步具体的算法如下：

INPUT $\{g_1(x_1), g_2(x_1,x_2), \cdots, g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$;
$I(x_1,\cdots,x_n)$

OUTPUT $\{g_1(x_1), g_2(x_1,x_2), \cdots, g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$ 的实根分离区间;
$I(x_1,\cdots,x_n)$ 在每组实根分离区间下的符号

BEGIN

LABEL $G_1 := \{\text{realroot}(g_1(x_1),$ 精度$)$ 中表示正根的区间 $\}$

IF $G_1 = \emptyset$ THEN RETURN $\emptyset$ END IF

$k := 2$ /* 注 1

WHILE $k \leqslant n$ DO

$G_k = \emptyset$

$g_k(x_1,\cdots x_k) = g_k^+(x_1,\cdots x_k) + g_k^-(x_1,\cdots x_k)$ /* 注 2

FOR each p in G_{k-1} DO

$\underline{g}_k(x_k)$, $\overline{g}_k(x_k)$ /* 注 3

$\underline{G}_k = \{\text{realroot}(\underline{g}_k(x_k),$ 精度$)$ 中左区间为正的区间 $\}$

$\overline{G}_k = \{\text{realroot}(\overline{g}_k(x_k),$ 精度$)$ 中左区间为正的区间 $\}$

$Q_k(\underline{G}_k, \overline{G}_k)$ /* 注 4

IF g_k 在 $Q_k(\underline{G}_k, \overline{G}_k)$ 的某一区间中关于 x_k 不单调

THEN GOTO LABEL

END IF

$G_k = G_k$ union $Q_k(\underline{G}_k, \overline{G}_k)$

END FOR

$k := k + 1$

END WHILE /* 注 5

/* 下面判断 I 在每组根区间下的符号

$G = \emptyset$ /* 注 6

FOR p in G_n DO

$H=\emptyset$

$H=H$ union $\text{sgn}(I(x_1,\cdots,x_n))|_p$ /* 注 7

$G=G$ union {p union H}

END FOR

RETURN G /* 此即为最终结果

END

注 1 k 记录求第 k 个多项式 g_k 的第 k 个未知变元 x_k.

注 2 g_k^+， g_k^- 的定义方式同定理 1.

注 3 按照定理 3.1.7, 在 p 的限定下， $\underline{g}_k(x_k)$ 为 $g_k(x_1,\cdots x_k)$ 的下界多项式， $\overline{g}_k(x_k)$ 为 $g_k(x_1,\cdots x_k)$ 的上界多项式.

注 4 判断 $\overline{g}_k(x_k)$ 和 $\underline{g}_k(x_k)$ 是否关于 c 实根区间可匹配. 如果可以匹配, 按前述规则进行匹配；否则，以 $c_1/10$ 为精度，返回 BEGIN 重新计算.

注 5 最后得到的 G_n 即为 $\{g_1(x_1),g(x_1,x_2),\cdots,g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$ 的实根分离区间集合.

注 6 G 保存最终结果，即所有的实根分离区间和在相应分离区间限制下，需要判断符号的多项式的符号.

注 7 根据定理 3.2.8, $I(x_1,\cdots,x_n)$ 在 p 下，满足 i), 则 $\text{sgn}(I)=$ ‘$+$’, 满足 ii), 则 $\text{sgn}(I)=$ ‘$-$’，均不满足，则 $\text{sign}(I)=$ ‘$\tilde{0}$’ (表示 I 可能等于零).

我们根据以上算法，在 MAPLE 环境下，编制了一个取名为 mrealroot 的函数. 因为在后面的章节中会多次用到，我们在此对它的用法进行说明如下.

调用方式：

$$\begin{aligned}&> \text{mrealroot}([g_1(x_1),g_2(x_1,x_2),\cdots,g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)],[x_1,x_2,\cdots,x_n],\\&\qquad c,[h_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,h_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)]),\end{aligned}$$

其中 n,m 为自然数，c 是计算初始精度 (因为由多项式实根最小距离估计得到的精度一般远远高于满足算法可匹配所需的精度, 出于计算效率的考虑, 我们可以由经验给出一个计算初始精度). mrealroot 算法将求出多项式组 $\{g_1(x_1),g_2(x_1,x_2),\cdots,g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$ 的实零点，且判断 $h_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),(i=1,\cdots,m)$ 在这些零点上的符号.

输出如下

$$\Big[\big[x_{11},x_{12}\big],\big[x_{21},x_{22}\big],\cdots,\big[x_{n1},x_{n2}\big],\underbrace{+,-,\widetilde{0},\cdots,-}_{m}\Big]$$

$$\vdots$$

解中出现的‘+’表示对应的多项式在该组解下大于零，‘−’表示对应的多项式在该组解下小于零，$\widetilde{0}$ 表示对应的多项式在该组解下可能等于零，这种情形需要用到下一节的不可约分解，可以判断出在该组解一定为零的情况，如果不是，则通过提高精度最终得以判定符号. 上面的输出即意为，存在

$$(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)\in\Big[\Big[x_{11},x_{12}\Big]\times\Big[x_{21},x_{22}\Big]\times\cdots\times\Big[x_{n1},x_{n2}\Big]\Big],$$

使得 $h_1(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)>0, h_2(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)<0, h_3(\overline{x}_1,\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)$ 可能等于零， $\cdots, h_m(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)<0$ 。

下面我们以一个具体的例子说明我们的求解过程.

例 3.2.10 *在 R^2 上求三角化多项式*

$$f_1(x)=x^2-x-1,$$

$$f_2(x,y)=xy-y^2+1.$$

的实根分离区间.

1. 考虑 $x\in R_+$ 的情形. 利用 realroot 算法求出 $f_1(x)$ 在 R_+ 上的惟一实根分离区间 (精度为 $\frac{1}{10^2}$, 本例取这个精度就足以保证满足定义 3.2.7):

$$G_x=\Big[\frac{207}{128},\frac{13}{8}\Big].$$

现在考虑 $f_2(x,y)$ 在 $x\in G_x$ 情况下关于 y 的实根分离区间.

(a) 考虑 $y\in R_+$ 的情形.

求出此时 $f_2(x,y)$ 关于 y 的极大极小多项式:

$$\begin{aligned}\overline{f}_2(y)&=(xy+1)|_{x=\frac{13}{8}}+(-y^2)|_{x=\frac{207}{128}}\\&=\frac{207}{128}y+1-y^2,\\\underline{f}_2(y)&=(xy+1)|_{x=\frac{207}{128}}+(-y^2)|_{x=\frac{13}{8}}\\&=\frac{13}{8}y+1-y^2,\end{aligned}$$

利用 realroot 算法分别求出 $\overline{f}_2(y)$ 和 $\underline{f}_2(y)$ 的正实根分离区间:

$$\overline{G}_{xy1}=\left[\frac{67}{32},\frac{269}{128}\right],$$

$$\underline{G}_{xy1}=\left[\frac{67}{32},\frac{269}{128}\right].$$

显然，区间 $G_{xy1} = \left[\min(\underline{G}_{xy1}[1], \overline{G}_{xy1}[1]), \max(\underline{G}_{xy1}[2], \overline{G}_{xy1}[2])\right] = \left[\frac{67}{32}, \frac{269}{128}\right]$ 就正是 $f_2(x,y)$ 在 $x \in G_x$ 情况下关于 y 的正实根分离区间．因此，区间组合

$$G_1 = G_x \times G_{xy1} = \left[\frac{207}{128}, \frac{13}{8}\right] \times \left[\frac{67}{32}, \frac{269}{128}\right]$$

是多项式组 $f_1(x), f_2(x,y)$ 的一组实根分离区间.

(b) 考虑 $y \in R_-$ 的情形．对 $f_2(x,y)$ 作代换 $y \mapsto -y$ 后有

$$f_2'(x,y) = -xy - y^2 + 1,$$

与前面一样的处理方式，得到 $f_2'(x,y)$ 在 $x \in G_x$ 下关于 y 的正实根分离区间：

$$G'_{xy2} = \left[\frac{15}{32}, \frac{61}{128}\right].$$

因此对 G'_{xy2} 作一个变换后得到的 $G_{xy2} = \left[-\frac{61}{128}, -\frac{15}{32}\right]$ 即为 $f_2(x,y)$ 在 $x \in G_x$ 下关于 y 的负实根分离区间．所以区间组合

$$G_2 = G_x \times G_{xy2} = \left[\frac{207}{128}, \frac{13}{8}\right] \times \left[-\frac{61}{128}, -\frac{15}{32}\right]$$

也是多项式组 $f_1(x), f_2(x,y)$ 的一组实根分离区间.

2．考虑 $x \in R_-$ 的情形．对 $f_1(x), f_2(x,y)$ 作代换 $x \mapsto -x$, 转化到 R_+ 上．再完全按照前面的处理方式，我们又得到两组实根分离区间：

$$G_3 = \left[-\frac{5}{8}, -\frac{79}{128}\right] \times \left[\frac{47}{64}, \frac{95}{128}\right],$$

$$G_4 = \left[-\frac{5}{8}, -\frac{79}{128}\right] \times \left[-\frac{175}{128}, -\frac{173}{128}\right].$$

所以该例有四组实根分离区间 G_1, G_2, G_3, G_4.

3.3 三角化多项式组的不可约分解算法

上一节的实根分离算法中，假定了三角化多项式组无重根．本节我们利用代数扩域上多项式的不可约分解算法将一三角列分解为一组不可约多项式组的情形, 该不可约多项式组中的多项式是无平方因子的. 出于解多项式组的需要, 本节中考虑的数域为有理数域，其理论可以推广到一般的特征为零的域.

任给一组三角化的多项式组：

$$(TS)\qquad \begin{cases} f_1(x_1)=0,\\ f_2(x_1,x_2)=0,\\ \cdots \\ f_s(x_1,\cdots,x_s)=0. \end{cases}$$

x_i 称为 f_i 的主变元，一般的，要求 $\deg(f_i,x_i)>0$. f_i 的次数为其关于主变元的次数. $I_i=\mathrm{lcoeff}(f_i,x_i)$ 称为 f_i 的初式，显然，$I_i\in Q[x_1,\cdots,x_{i-1}]$.

定义 3.3.1 如果三角列 TS 中任意两个多项式 f_i 和 $f_j, i>j, f_i$ 对 f_j 已经约化，即 $\deg(f_i,x_j)<\deg(f_j,x_j)$, 则称三角列 TS 为升列.

任给三角列，都可以通过多项式的求余算法将其约化，成为一升列. 数域 Q 中任一非零常数构成一类特殊的升列，称为矛盾升列.

定义 3.3.2 对于一个多项式 $g(x_1,\cdots,x_s)$, 与如上的升列 TS, 记

$$\begin{aligned} r_s &= g,\\ r_{s-1} &= prem(r_s,f_s,x_s),\\ &\cdots\cdots\\ r_0 &= prem(r_1,f_1,x_1). \end{aligned}$$

称 r_0 为多项式 g 关于升列 TS 的余式，记为 $prem(g,\{f_s,\cdots,f_1\})$.

在上述定义中，结合伪除法的公式，我们可以得到如下的余式公式，

$$\prod_{j=1}^{s} I_j^{t_j} g = q_s f_s + q_{s-1}f_{s-1}+\cdots+q_1 f_1 + r_0,$$

这里，I_j 为相应于 f_j 的初式.

对于单变元多项式 $f(x)$, $g(x)$, 将 $f(x)$ 在 $Q[x]$ 上做不可约分解，有

$$f(x)=\prod_{i=1}^{k} p_i(x)^{e_i},$$

其中，$p_i(x)\in Q[x]$ 不可约. 很显然，对于任一 p_i, 有 $\mathrm{GCD}(p_i,g)=p_i$ 或者 $\mathrm{GCD}(p_i,g)=1$ 之一成立. 亦即：$\mathrm{Zero}(p_i)\subseteq \mathrm{Zero}(g)$ 或者 $\mathrm{Zero}(p_i)\cap\mathrm{Zero}(g)=\phi$ 之一成立，且此时

$$prem(g,p_i)=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \mathrm{RES}(g,p_i)=0.$$

设指标集 τ 为由满足 $\mathrm{GCD}(p_i,g)=p_i$ 的下标 i 构成的集合，则

$$\mathrm{Zero}(f,g)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Zero}(p_i,g)=\sum_{j\in\tau}\mathrm{Zero}(p_j).$$

下面，对升列 TS 做分解，使其具有单变元多项式不可约分解所得到的分支相似的性质. 通过应用代数扩域上的不可约分解算法，可以实现升列的不可约分解.

定义 3.3.3 如果升列 $TS=\{f_1(x_1),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n)\}$ 满足条件:

i) $f_1(x_1)$ 在 $Q[x_1]$ 上不可约，记 ξ_1 为 $f_1(x_1)$ 在域 Q 上的一个扩充零点，即 $f_1(\xi_1)=0$;

ii) 添加 ξ_1 到域 Q 上得到代数扩域 $Q(\xi_1)$, 记为 K_1, 多项式 $f_2(\xi_1,x_2)$ 在 $K[x_2]$ 上不可约, 记 ξ_2 为 $f_2(\xi_1,x_2)$ 在域 K_1 上的一个扩充零点 , 即 $f_2(\xi_1,\xi_2)=0$;

iii) 归纳地定义，对 $3\leqslant i\leqslant n$, 添加 ξ_{i-1} 到域 K_{i-2} 上得到代数扩域 $Q(\xi_1,\cdots,\xi_{i-1})$, 记为 K_{i-1}, 多项式 $f_i(\xi_1,\cdots,\xi_{i-1},x_i)$ 在 $K_{i-1}[x_i]$ 上不可约，记 ξ_i 为 $f_i(\xi_1,\cdots,\xi_{i-1},x_i)$ 在域 K_{i-1} 上的一个扩充零点, 即 $f_i(\xi_1,\cdots,\xi_{i-1},\xi_i)=0$; 则称 TS 为不可约升列.

注意到在单变元多项式中, 对于任意的 $q(x)$ 不可约, 其零点称为代数元. 反之, 任一代数元 ξ 确定一不可约多项式 $\varphi(x)$, 称为代数元 ξ 的定义多项式. $\varphi(x)$ 是 ξ 满足的最低幂次的多项式, 即: 如果 $\deg(\varphi(x))=m$, $\deg(g(x))<m$ 且 $g(\xi)=0$, 则 $g(\xi)\equiv 0$. 显然，对于不可约升列，若 f_i 的初式 I_i, 则 $I_i(\xi_1,\cdots,\xi_{i-1})\neq 0$. 由余式公式，不难得到:

定理 3.3.4 记 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_{i-1})$ 是不可约升列 $IRR=\{f_1(x_1),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n)\}$ 的一组零点， $F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)\in Q[x_1,\cdots,x_n]$. ξ 是 $F(x)$ 的零点当且仅当 $F(x)$ 对不可约升列 IRR 的余式为零，即

$$\mathrm{Zero}(IRR,F)=\mathrm{Zero}(IRR)\Longleftrightarrow prem(F,\{f_n,\cdots,f_1\})=0.$$

容易知道，对于任意的 $F(x)$ 和 IRR, $\mathrm{Zero}(IRR,F)=\mathrm{Zero}(IRR)$ 或者 $\mathrm{Zero}(IRR,F)=\emptyset$ 之一必成立. 故对于任意两个不可约升列，要么其有相同的解，要么无公共根.

下面，对于任意的升列 $TS=\{f_1(x_1),\cdots,f_{k+1}(x_1,\cdots,x_{k+1})\}$, 我们对其进行不可约分解. 通过递归逐次在代数扩域上的多项式不可约分解实现升列的不可约分解:

不妨设 $\overline{TS}=\{f_1(x_1),\cdots,f_k(x_1,\cdots,x_k)\}$ 是不可约的， $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k)$ 是其一组零点. 扩域 $Q_k=Q(\xi_1,\cdots,\xi_k)$, 多项式 $\overline{f}_{k+1}(x_{k+1})=\mathrm{subs}(\{x_1=\xi_1,\cdots,x_k=\xi_k\},f_{k+1})$. 设在多项式环 $Q_k[x_{k+1}]$ 上， $\overline{f}_{k+1}(x_{k+1})$ 有如下不可约分解:

$$\overline{f}_{k+1}(x_{k+1})=p_1^{t_1}(x_{k+1})p_2^{t_2}(x_{k+1})\cdots p_s^{t_s}(x_{k+1})$$

其中， $p_i^{t_i}$ 在 $Q_k[x_{k+1}]$ 上不可约，且其系数是关于 $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 的有理函数. 通分

后，将 $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 再由 $x_1,\cdots,x_k$ 替换，我们得到：

$$\begin{aligned}&\overline{f}_{k+1}(x_1,\cdots,x_{k+1})\\&=\frac{p(x_1,\cdots,x_k)}{q(x_1,\cdots,x_k)}\overline{p}_1^{t_1}(x_1,\cdots,x_{k+1})\overline{p}_2^{t_2}(x_1,\cdots,x_{k+1})\cdots\overline{p}_s^{t_s}(x_1,\cdots,x_{k+1})\end{aligned}$$

$\frac{p(x_1,\cdots,x_k)}{q(x_1,\cdots,x_k)}$ 在 Q_k 上为非零常数，不用考虑. 不妨设 $\bar{p}_i$ 对于 $\overline{TS}$ 是约化的，否则进行约化则可. 则升列 TS 可以分解为一组不可约升列：

$$IRR_i=\{f_1,\cdots,f_k,\bar{p}_i\},i=1,\cdots,s.$$

当我们令 k 从 0 到 $n-1$ 逐次进行上述分解，又由不可约升列的初式非零，则可以得到：

定理 3.3.5 任给升列 $TS=\{f_1(x_1),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n)\}$，存在一算法，使得有限步之后，得到一组不可约升列 $IRR_i,i=1,\cdots,s$，且满足：

$$\mathrm{Zero}(f_1,\cdots,f_n)=\sum_{i=1}^{s}\mathrm{Zero}(IRR_i).$$

将上述定理用算法形式给出，有：

INPUT $TS=\{f_1(x_1),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n)\}$

OUTPUT $IRR[i],i=1,\cdots,s$，满足： $\mathrm{Zero}(TS)=\sum_{i=1}^{s}\mathrm{Zero}(IRR[i])$.

```
BEGIN
  IRR := [ ], IRRtemp := [ ]
  FOR j FROM 1 TO n DO
    IRR := [ ]
    FOR IRRTS IN IRRtemp DO
      FS := factors(f_j, Q(IRRTS))
      FOR Term IN FS DO
        IRR := [op(IRR), [op(IRRTS), Term]]
      END FOR
    END FOR
    IRRtemp := IRR
  END FOR
  RETURN IRR
END
```

其中 $Q(IRRTS)$ 表示由不可约升列 $IRRTS$ 的一组零点加到 Q 上生成的代数扩域.

例 3.3.6 考虑多项式组 $\{f_1 = x^2+2x+3+y^5-y = 0, f_2 = y^6-y^2+2y = 0\}$ 的不可约分解.

1. 以 $x \prec y$ 为变元序，得到原多项式组的特征列为： $[f_2, f_1]$.
2. $factor(f_2) = y(y^5 - y + 2)$, 则 $IRRlist := [[y], [y^5 - y + 2]]$;
3. $factor(\mathrm{subs}(y = 0, f_1)) = x^2 + 2 * x + 3$, 则 $IRR_1 := [y, x^2 + 2 * x + 3]$;

$factor(\mathrm{subs}(y = rootof(y^5 - y + 2), f_1), rootof(y^5 - y + 2)) = (x + 1)^2$, 则 $IRR_2 := [y^5 - y + 2, x + 1]$; 注意到第一个 factor 中，由于 $y = 0$ 是有理根，所以仍然是有理数域上的多项式分解. 在第二个 factor 中， $y^5 - y + 2 = 0$ 的根非有理的，故用到代数扩域上的多项式分解.

4. 显然有， $\mathrm{Zero}(f_1, f_2) = \mathrm{Zero}(f_2, f_1) = \mathrm{Zero}(IRR_1) \cup \mathrm{Zero}(IRR_2)$.

例 3.3.7 考虑多项式组 $F := [x+y+z-15, x^2+y^2+z^2-83, x^3+y^3+z^3-495]$ 的不可约分解. (Example from E.J.Barbeau's book—Polynomials, p 124)

1. 以 $z \prec y \prec x$ 为变元序，得到原多项式组的特征列为： $TS = [-105 - 15x^2 + 71x + x^3, x^2 + y^2 + 71 + xy - 15x - 15y, x + y + z - 15]$.
2. $factor(TS[1]) = (-5 + x)(-7 + x)(-3 + x)$,

则 $IRRlist := [[-5 + x], [-7 + x], [-3 + x]]$;

3. $factor(\mathrm{subs}(x = 5, TS[2])) = (y - 7)(y - 3)$,

则 $IRRlist[1] := [[-5 + x, y - 7], [-5 + x, y - 3]]$;

$factor(\mathrm{subs}(x = 7, TS[2])) = (y - 5)(y - 3)$,

则 $IRRlist[2] := [[-7 + x, y - 5], [-7 + x, y - 3]]$;

$factor(\mathrm{subs}(x = 3, TS[2])) = (y - 5)(y - 7)$,

则 $IRRlist[3] := [[-3 + x, y - 5], [-3 + x, y - 7]]$.

4.

$factor(\mathrm{subs}(\{x = 5, y = 7\}, TS[3])) = z - 3$, 则 $IRR_1 := [[-5 + x, y - 7, z - 3]]$;
$factor(\mathrm{subs}(\{x = 5, y = 3\}, TS[3])) = z - 7$, 则 $IRR_2 := [[-5 + x, y - 7, z - 7]]$;
$factor(\mathrm{subs}(\{x = 7, y = 5\}, TS[3])) = z - 3$, 则 $IRR_3 := [[-7 + x, y - 5, z - 3]]$;
$factor(\mathrm{subs}(\{x = 7, y = 3\}, TS[3])) = z - 5$, 则 $IRR_4 := [[-7 + x, y - 3, z - 5]]$;
$factor(\mathrm{subs}(\{x = 3, y = 5\}, TS[3])) = z - 7$, 则 $IRR_5 := [[-3 + x, y - 5, z - 7]]$;
$factor(\mathrm{subs}(\{x = 3, y = 7\}, TS[3])) = z - 5$, 则 $IRR_6 := [[-3 + x, y - 7, z - 5]]$.

5. 显然有, $\mathrm{Zero}(F) = \mathrm{Zero}(TS) = \mathrm{Zero}(IRR_1) \cup \mathrm{Zero}(IRR_2) \cup \mathrm{Zero}(IRR_3) \cup \mathrm{Zero}(IRR_4) \cup \mathrm{Zero}(IRR_5) \cup \mathrm{Zero}(IRR_6)$.

下面，我们看一个更为复杂的例子，该例子在第 4 章还要用到.

例 3.3.8 考虑多项式组 $F = [10x_1(2 - x_1 - y_1) + 5x_2 - 5x_1, 10x_2(2 - x_2 - y_2) - 5x_2 + 5x_1, 10y_1(5 - x_1 - 2y_1) + 5y_2 - 5y_1, y_2(15 - 10x_2 - 20y_2) + 5y_1 - 5y_2]$ 的不可约分解.

1. 以 $y_2 \prec y_1 \prec x_2 \prec x_1$ 为变元序，得到原多项式组的特征列为

$$
\begin{aligned}
TS = [[[&x_1^4(134624x_1^8 + 13146164x_1^5 - 19958952x_1^7 + 3010392x_1^6 + \\
&871216x_1^4 - 5333994x_1^3 + 13575904x_1^9 - 2154048x_1^{10} - \\
&4536064x_1^{11} - 223232x_1^{14} + 751616x_1^{13} + 1103872x_1^{12} + \\
&16384x_1^{16} - 49152x_1^{15} + 240618 - 1417022x_1^2 + 723567x_1), \\
&x_1^3(-128x_1^9 + 512x_2x_1^{10} + 960x_1^7x_2 - \\
&6400x_1^8x_2 - 272x_1^6 + 1216x_1^7 + 28768x_1^6x_2 - \\
&8704x_2x_1^5 - 3904x_1^5 + 2544x_1^4 - 2897x_2 - 4776x_2x_1 - \\
&291x_1 + 23558x_2x_1^2 - 52712x_1^4x_2 + 23828x_2x_1^3 + \\
&1818x_1^3 - 814x_1^2), x_1^4(10496x_1^8 - \\
&39792x_1^5 + 27328x_1^7 - 51248x_1^6 + 100944x_1^4 - \\
&10912x_1^3 - 6400x_1^9 + 28768x_1^6y_1 + 512x_1^{10}y_1 + \\
&960x_1^7y_1 - 6400x_1^8y_1 - 8704x_1^5y_1 - \\
&2897y_1 - 4776x_1y_1 + 23558x_1^2y_1 - 52712x_1^4y_1 + 23828x_1^3y_1 - \\
&768x_1^{10} + 512x_1^{11} + 4200 - 39204x_1^2 + 3860x_1), x_1^4(-21252 - \\
&61230x_1 + 10848x_1^2y_2 + 113792x_1^3y_2 + 46932x_1^4y_2 - \\
&45568x_1^{12} - 731008x_1^9 + 161280x_1^{11} + \\
&142464x_1^{10} - 53792x_1^8 + 1414416x_1^7 - 2048x_1^{12}y_2 + \\
&6144x_1^{11}y_2 + 18176x_1^{10}y_2 - 66560x_1^9y_2 - \\
&39936x_1^8y_2 + 261856x_1^7y_2 - 114688x_1^6y_2 - \\
&197680x_1^5y_2 - 12288x_1^{13} + 4096x_1^{14} - 6111y_2 + \\
&128816x_1^2 + 463524x_1^3 - 25824y_2x_1 - 32856x_1^4 - 303072x_1^6 - \\
&1035608x_1^5)], x_1(-17703567 + 11047538048x_1^{11} + \\
&9894086816x_1^8 - 9766619648x_1^{10} - \\
&10948400640x_1^9 + 7745589648x_1^7 - 4350041240x_1^6 + \\
&2623977472x_1^{12} - 4799985664x_1^{13} + 141390848x_1^{14} - \\
&69681152x_1^{17} - 157241344x_1^{16} + \\
&948066304x_1^{15} + 17072128x_1^{18} - 103998264x_1 + 52054170x_1^2 + \\
&1093091404x_1^3 - 4093869536x_1^5 + 709085388x_1^4)], \\
&[x_1, x_2, y_1(17 + 316y_1 - 288y_1^2 + 64y_1^3), -9y_1 + 4y_1^2 - y_2]],
\end{aligned}
$$

其中， $TS[1][2]$ 是求特征列时出现的初式，利用不可约分解，可以很容易得到满足其不为零的不可约分支.

2. 通过上述的不可约分解算法，可以得到：

$$
IRR_1 = \Big[x_1^9 + 3x_1^8 - \frac{27}{4}x_1^7 - \frac{49}{2}x_1^6 + \frac{395}{32}x_1^5 + \frac{4209}{64}x_1^4 - \frac{341}{64}x_1^3 -
$$

$$\frac{16437}{256}x_1^2+\frac{225}{256}x_1+\frac{5729}{512},-\frac{34290213375}{31484019328}-\frac{1550812583}{983875604}x_1^6-$$

$$\frac{12567922469}{491937802}x_1^5-\frac{135266349205}{7871004832}x_1^4+\frac{1035427884}{245968901}x_1^7+$$

$$\frac{611297300947}{15742009664}x_1^3+\frac{8273247971}{245968901}x_1^2+x_1^8-\frac{677482717015}{62968038656}x_1-$$

$$\frac{123273041767}{31484019328}x_2,-\frac{123273041767}{1532256000}y_1-\frac{3897079583}{95766000}x_1^5-$$

$$\frac{47907466751}{191532000}x_1^4-\frac{16976292491}{153225600}x_1^3+x_1^8+\frac{317793401}{23941500}x_1^7+$$

$$\frac{291274253}{7980500}x_1^6+\frac{153916609751}{766128000}x_1+\frac{67542371087}{6129024000}+$$

$$\frac{603133249447}{1532256000}x_1^2,\frac{123273041767}{10288561024}y_2+x_1^8+\frac{541492674}{80379383}x_1^7+$$

$$\frac{1603467219}{321517532}x_1^6-\frac{1883623471}{45931076}x_1^5-\frac{151881558363}{2572140256}x_1^4+$$

$$\frac{332272024629}{5144280512}x_1^3+\frac{530220562299}{5144280512}x_1^2-$$

$$\frac{563089354463}{20577122048}x_1-\frac{446036122923}{20577122048}],$$

$$IRR_2=\left[x_1^2-x_1-\frac{1}{2},x_1-1+x_2,y_1,y_2\right],$$
$$IRR_3=[x_1-2,-2+x_2,y_1,y_2],$$
$$IRR_4=[x_1,x_2,y_1,y_2],$$
$$IRR_5=\left[x_1,x_2,y_1^3-\frac{9}{2}y_1^2+\frac{79}{16}y_1+\frac{17}{64},-\frac{1}{4}y_2-\frac{9}{4}y_1+y_1^2\right].$$

3. 显然有 $\mathrm{Zero}(F)=\mathrm{Zero}(TS)=\mathrm{Zero}(IRR_1)\cup\mathrm{Zero}(IRR_2)\cup\mathrm{Zero}(IRR_3)\cup\mathrm{Zero}(IRR_4)\cup\mathrm{Zero}(IRR_5)$.

3.4 例 子

下面是几个有代表性的例子，除了例 3.4.5 是讨论复根的求解外，其他几个都是选自某些资料中的．读者想了解详细情况可参阅参考文献． (这些例子都

是在 Pentium III 550 计算机， MAPLE V 5.1 环境下完成的.)

例 3.4.1

$$\begin{aligned} f_{11} &= x^5+y^2+z^2-4, \\ f_{12} &= x^2+2y^2-5, \\ f_{13} &= xz-1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

首先用吴方法三角化，得到

$$\begin{aligned} g_{11} &= 2x^7+2-3x^2-x^4, \\ g_{12} &= x^2+2y^2-5, \\ g_{13} &= xz-1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

该三角化过程中没有产生初式. 调用函数 mrealroot()：

$$> \mathrm{mrealroot}\Big(\Big[g_{11},g_{12},g_{13}\Big],\Big[x,y,z\Big],\frac{1}{10}\Big)$$

有

$$\Big[\Big[1,1\Big],\Big[\frac{11}{8},\frac{23}{16}\Big],\Big[1,1\Big]\Big],\qquad \Big[\Big[\frac{13}{16},\frac{7}{8}\Big],\Big[\frac{23}{16},\frac{3}{2}\Big],\Big[\frac{9}{8},\frac{5}{4}\Big]\Big],$$

$$\Big[\Big[1,1\Big],\Big[-\frac{23}{16},-\frac{11}{8}\Big],\Big[1,1\Big]\Big],\quad \Big[\Big[-\frac{3}{4},-\frac{11}{16}\Big],\Big[\frac{23}{16},\frac{25}{16}\Big],\Big[-\frac{3}{2},-\frac{21}{16}\Big]\Big],$$

$$\Big[\Big[\frac{13}{16},\frac{7}{8}\Big],\Big[-\frac{3}{2},-\frac{23}{16}\Big],\Big[\frac{9}{8},\frac{5}{4}\Big]\Big],\Big[\Big[-\frac{3}{4},-\frac{11}{16}\Big],\Big[-\frac{25}{16},-\frac{23}{16}\Big],\Big[-\frac{3}{2},-\frac{21}{16}\Big]\Big].$$

说明 (3.3), 即 (3.2) 有六组实根.

例 3.4.2

$$\begin{aligned} f_{21} &= x^2-2xz+5, \\ f_{22} &= xy^2+yz+1, \\ f_{23} &= 3y^2-8xz. \end{aligned} \tag{3.4}$$

三角化得

$$\begin{aligned} g_{21} &= y(320+1600y^4-240y^5-471y^6+36y^7-48y^2+36y^8), \\ g_{22} &= -40y^2+3y^3+6y^4+8x, \\ g_{23} &= -8yz-8-40y^4+3y^5+6y^6. \end{aligned} \tag{3.5}$$

同样没有初式. 调用 mrealroot( ):

$$> \mathrm{mrealroot}\Big(\Big[g_{21},g_{22},g_{23}\Big],\Big[x,y,z\Big],\frac{1}{10^5}\Big)$$

得到

$$\Big[\Big[-\frac{188613}{65536},-\frac{377225}{131072}\Big],\Big[-\frac{72181}{65536},-\frac{36063}{32768}\Big],\Big[-\frac{185017}{65536},-\frac{369513}{131072}\Big]\Big],$$

$$\Big[\Big[-\frac{45}{16},-\frac{368639}{131072}\Big],\Big[\frac{126525}{131072},\frac{63315}{65536}\Big],\Big[\frac{50295}{16384},\frac{100711}{32768}\Big]\Big].$$

此即说明 (3.5), 即 (3.4) 有两组实根.

例 3.4.3

$$\begin{aligned} f_{31} &= x^2+2y^2-y-2z,\\ f_{32} &= x^2-8y^2+10z-1,\\ f_{33} &= x^2-7yz. \end{aligned} \tag{3.6}$$

三角化后有

$$\begin{aligned} g_{31} &= 2450x^6-1241x^4+196x^2-49,\\ g_{32} &= 86x^2+35yx^2-77y-14,\\ g_{33} &= 175x^4+70x^2z-76x^2-154z+21. \end{aligned} \tag{3.7}$$

初式 $I=5x^2-11$. 调用 mrealroot( ) :

$$> \text{mrealroot}\Big(\big[g_{31},g_{32},g_{33}\big],\big[x,y,z\big],\frac{1}{10^5},\big[I\big]\Big)$$

有

$$\Big[\Big[\frac{85823}{131072},\frac{1341}{2048}\Big],\Big[\frac{48355}{131072},\frac{24179}{65536}\Big],\Big[\frac{10879}{65536},\frac{10881}{65536}\Big],-\Big],$$

$$\Big[\Big[-\frac{1341}{2048},-\frac{85823}{131072}\Big],\Big[\frac{48355}{131072},\frac{24179}{65536}\Big],\Big[\frac{10879}{65536},\frac{10881}{65536}\Big],-\Big].$$

此算法给出 (3.7) 的两组实根, 且均使得初式 I 不为零. 故 (3.6) 恰有两组实根.

例 3.4.4

$$\begin{aligned} f_{31} &= x^4+y^4-1,\\ f_{32} &= x^5y^2-4x^3y^3+x^2y^5-1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

利用吴方法三角化得

$$\begin{aligned} g_{31} = {} & 16y^5-36y^9+30y^{10}-y^8+144y^{15}-64y^{11}+758y^{16}-\\ & 251y^{12}+28y^{13}-126y^{14}+4y^{21}-12y^{17}-128y^{22}+192y^{18}+\\ & 48y^{23}-112y^{19}-757y^{20}+32y^{26}-16y^{27}+249y^{24}+2y^{28}+1,\\ g_{32} = {} & 4x+y-2y^5+2y^8x-2y^4x+y^2+16y^3-24y^7-xy^3+\\ & 4y^{10}x-3y^{11}x+3y^7x+y^9-32xy^9+16y^{13}x-\\ & 4y^{14}x+y^{15}x-8y^{15}+16y^{11}+y^{16}-y^{12}+16y^5x \end{aligned}$$

初式为

$I=4+2y^8-2y^4-y^3+4y^{10}-3y^{11}+3y^7-32y^9+16y^{13}-4y^{14}+y^{15}+16y^5.$

调用 mrealroot( ) :

$$> \mathrm{mrealroot}\Big(\Big[g_{31}, g_{32}\Big], \Big[y, x\Big], \frac{1}{10^5}, \Big[I\Big]\Big)$$

得到

$$\Big[\Big[-\frac{121139}{131072}, -\frac{60569}{65536}\Big], \Big[\frac{47213}{65536}, \frac{47299}{65536}\Big], +\Big],$$

$$\Big[\Big[\frac{94517}{131072}, \frac{47259}{65536}\Big], \Big[-\frac{60575}{65536}, -\frac{60563}{65536}\Big], +\Big],$$

$$\Big[\Big[-\frac{78307}{131072}, -\frac{39153}{65536}\Big], \Big[\frac{126675}{131072}, \frac{31673}{32768}\Big], +\Big],$$

$$\Big[\Big[\frac{126681}{131072}, \frac{63341}{65536}\Big], \Big[-\frac{19599}{32768}, -\frac{39111}{65536}\Big], +\Big].$$

故原多项式组有四组实根.

上面的几个例子，都是在实数域上考虑的．其实，我们也可以在复数域上考虑，这只需要做变换： $x \to x_1 + ix_2$, 根据复数为零，则实、虚部为零，这样就转化到了实数域上.

例 3.4.5 *求如下方程组的复根分离区间.*

$$\begin{aligned} f_{51} &= 2x^2 - xy + 4, \\ f_{52} &= xy - 2y^2 + 4. \end{aligned} \tag{3.9}$$

作变换： $x \to x_1 + ix_2, y \to y_1 + iy_2$, 有

$$\begin{aligned} f_{51} &= p_{511} + ip_{512}, \\ f_{52} &= p_{521} + ip_{522}. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} p_{511} &= 2x_1^2 + 4 - 2x_2^2 - x_1y_1 + x_2y_2, \\ p_{512} &= 4x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1, \\ p_{521} &= x_1y_1 + 4 - x_2y_2 - 2y_1^2 + 2y_2^2, \\ p_{522} &= x_1y_2 + x_2y_1 - 4y_1y_2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

考虑 (3.9) 的复根，等价于考虑 (3.10) 的实根．利用吴方法对 (3.10) 进行三角化

得:

$$\begin{aligned} g_{51} &= 3y_1^4 - 6y_1^2 - 1, \\ g_{52} &= 2y_1^3 - x_1y_1^2 - 4y_1 + x_1, \\ g_{53} &= -y_1^2 + 2 + y_2^2, \\ g_{54} &= y_1^2x_2 - 2y_1^2y_2 - x_2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

初式为 $I = (y_1 - 1)(y_1 + 1)$.

调用 mrealroot():

$$> \text{mrealroot}\left(\left[g_{51}, g_{52}, g_{53}, g_{54}\right], \left[y_1, x_1, y_2, x_2\right], \frac{1}{10^2}, \left[I\right]\right)$$

得到

$$\left[\left[\frac{187}{128}, \frac{47}{32}\right], \left[\frac{39}{128}, \frac{7}{16}\right], \left[\frac{23}{64}, \frac{51}{128}\right], \left[\frac{169}{128}, \frac{97}{64}\right], +\right],$$

$$\left[\left[\frac{187}{128}, \frac{47}{32}\right], \left[\frac{39}{128}, \frac{7}{16}\right], \left[-\frac{51}{128}, -\frac{23}{64}\right], \left[-\frac{97}{64}, -\frac{199}{128}\right], +\right],$$

$$\left[\left[-\frac{47}{32}, -\frac{187}{128}\right], \left[-\frac{7}{16}, -\frac{39}{128}\right], \left[\frac{23}{64}, \frac{51}{128}\right], \left[\frac{169}{128}, \frac{97}{64}\right], +\right],$$

$$\left[\left[-\frac{47}{32}, -\frac{187}{128}\right], \left[-\frac{7}{16}, -\frac{39}{128}\right], \left[-\frac{51}{128}, -\frac{23}{64}\right], \left[-\frac{97}{64}, -\frac{169}{128}\right], +\right].$$

故 (3.9) 复根有如下 4 个复根 ($x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$)

$$\left[\left[\frac{39}{128}, \frac{7}{16}\right] \times \left[\frac{169}{128}, \frac{97}{64}\right], \left[\frac{187}{128}, \frac{47}{32}\right] \times \left[\frac{23}{64}, \frac{51}{128}\right]\right],$$

$$\left[\left[\frac{39}{128}, \frac{7}{16}\right] \times \left[-\frac{97}{64}, -\frac{199}{128}\right], \left[\frac{187}{128}, \frac{47}{32}\right] \times \left[-\frac{51}{128}, -\frac{23}{64}\right]\right],$$

$$\left[\left[-\frac{7}{16}, -\frac{39}{128}\right] \times \left[\frac{169}{128}, \frac{97}{64}\right], \left[-\frac{47}{32}, -\frac{187}{128}\right] \times \left[\frac{23}{64}, \frac{51}{128}\right]\right],$$

$$\left[\left[-\frac{7}{16}, -\frac{39}{128}\right] \times \left[-\frac{97}{64}, -\frac{169}{128}\right], \left[-\frac{47}{32}, -\frac{187}{128}\right] \times \left[-\frac{51}{128}, -\frac{23}{64}\right]\right].$$

注 释

3.1 节的内容取自 [18] 及 [22]. 3.2 节为本书主要内容, 取自 [47, 48]. 3.3 节利用三角化多项式组的不可约分解算法处理重根取自 [73]. 我们所使用的数学软件为 Maple V, 参考 [9].

例 3.4.1, 3.4.2 取自 [19]. 例 3.4.3, 3.4.4 取自 [2].

第四章　单调系统

利用单调系统理论将单调 (K 单调，拟单调) 微分多项式系统的永久性及稳定性化为多项式系统的实根分布及根的正 (负) 性判定问题． mrealroot 算法为我们提供了确定多项式组正实根个数的算法．据此，我们可以解决一类单调 Lotka-Volterra 扩散系统的永久性及稳定性问题．

4.1　单调性定理

近 20 年来，新的方法和理论大量出现在单调动力系统的研究之中，将其应用于一大类实际问题 (经济、物理、化学、生物等) 得到了很多较为完整的定性结论．本章我们结合 mrealroot 算法，考虑一类种群生态学中的单调系统：共存或竞争的 Lotka-Volterra 扩散系统．

为此我们先给出几类单调系统的定义及例子．

首先考虑一般的 n 维系统：

$$\dot{x} = F(x), \tag{4.1}$$

其中 F 为 $R_+^n = \{x \in R^n | x_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, n\}$ 上的 C^1 函数．如果其 Jacobi 矩阵 $DF(x)$ 的非对角线上元素均非负，即对所有的 $i \neq j$ $(i, j = 1, \cdots, n)$, 当 $x \in R_+^n$ 时，有 $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \geqslant 0$, 则 (4.1) 称为共存系统． (4.1) 取初值 $x(0)$ 的解记为 $x(t)$.

如下的两种群 Lotka-Volterra 共存系统就是满足上述定义的典型系统．

例 4.1.1　R_+^2 上的 Lotka-Volterra 共存系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(r_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2),\\ \dot{x}_2 &= x_2(r_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2),\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $a_{12} > 0, a_{21} > 0$. 此时， (4.2) 的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} r_1 + 2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12}x_1 \\ \\ a_{21}x_2 & r_2 + a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Kamake 的单调性定理在 (4.1) 情形为

定理 4.1.2 (Kamake, 1932)　*假如 R_+^n 关于共存系统 (4.1) 不变，则当正初值 $\bar{x}(0)$, $\underline{x}(0)$ 满足 $\bar{x}(0) \geqslant \underline{x}(0)$ 时，其对应的解 $\bar{x}(t)$, $\underline{x}(t)$ 是保序的，即有 $\bar{x}(t) \geqslant \underline{x}(t)$.*

定理 4.1.2 为下面的 $K-$ 单调及拟单调定理的特例. 1980 年 Selgrade 给出了判断单调系统解的单调性的十分有效的 Selgrade 定理.

定理 4.1.3 (Selgrade, 1980) 假设 R_+^n 关于共存系统 (4.1) 不变, 且正初值 $x(0)$ 使得 $F(x(0)) \geqslant 0$ $(F(x(0)) \leqslant 0)$, 则解 $x(t)$ 关于 $t \geqslant 0$ 单调不减 (不增). 特别地, 若 $x(t)$ 有界, 则其 ω 极限集由单个奇点构成.

利用 Selgrade 定理可以证明：若 (4.2) 存在惟一的正平衡点 $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, 则其全局稳定当且仅当

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

将 (4.1) 写成

$$\begin{aligned} \dot{[x]}_1 &= f_1([x]_1, [x]_2), \\ \dot{[x]}_2 &= f_2([x]_1, [x]_2), \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 (f_1, f_2) 和 $([x]_1, [x]_2)$ 分别为 F 和 x 的一个重排 $[x]_1 = (x_1, \cdots, x_k)$, $[x]_2 = (x_k, \cdots, x_n)$, 使得 (f_1, f_2) 的 Jacobi 矩阵形如

$$J = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix},$$

其中 $A, B, C,$ 和 D 分别为 $k \times k, k \times (n-k), (n-k) \times k, (n-k) \times (n-k)$ 阶矩阵. $A = (a_{ij})$ 和 $D = (d_{ij})$ 满足 $a_{ij} \geqslant 0 (i \neq j)$ 和 $d_{lm} \geqslant 0 (l \neq m)$ 而 $B \geqslant 0, C \geqslant 0$. 此时, 系统 (4.3) 称为 $K-$ 单调系统.

显然, 当 $k = n$ 时, $K-$ 单调系统即为共存系统. 当 (4.2) 满足 $a_{12} < 0, a_{21} < 0$, 即为竞争型时, 为一 $K-$ 单调系统.

假设 $\bar{P} = ([\bar{x}]_1, [\bar{x}]_2)$ 及 $P = ([x]_1, [x]_2)$ 为 $R_+^k \times R_+^{n-k}$ 中的两个点. 当 $[\bar{x}]_1 \geqslant [x]_1$ 且 $[\bar{x}]_2 \leqslant [x]_2$ 时, 记 $\bar{P} \geqslant_k P$. 如果 $t_1 > (<) t_2$ 时, 有 $([x(t_1)]_1, [x(t_1)]_2) \geq_k ([x(t_2)]_1, [x(t_2)]_2)$, 则系统 (4.3) 的解 $([x(t)]_1, [x(t)]_2)$ 称为是 $K-$ 单调不减 (不增).

对应于共存系统的 Kamake 和 Selgrade 定理, Smith 给出了如下的

定理 4.1.4 设系统 (4.3) 为 K 单调系统, 如果正初值满足

$$([x(0)]_1, [x(0)]_2) \geqslant_k ([\bar{x}(0)]_1, [\bar{x}(0)]_2),$$

则对于所有 $t > 0$, $([x(t)]_1, [x(t)]_2) \geqslant_k ([\bar{x}(t)]_1, [\bar{x}(t)]_2)$ 成立.

定理 4.1.5 设系统 (4.3) 为 K 单调系统, 如果

$$(f_1([x(0)]_1, [x(0)]_2), f_2([x(0)]_1, [x(0)]_2)) \geqslant_k (\leqslant_k) 0,$$

则对 $t>0$, $([x(t)]_1,[x(t)]_2)$ 为 K 单调不减 (不增). 进一步, 如果 $([x(t)]_1,[x(t)]_2)$ 有界，则其 ω 极限集为一平衡点.

除了以上讨论的共存及 K 单调系统，我们还要考虑一类更为广泛的所谓拟单调系统. 例如，系统 (4.2) 当 $a_{12}a_{21}<0$ 时，既不为共存也不为 K 单调系统. 但 (4.2) 的 Jacobi 矩阵的非对角元或为正或为负，即保持定号，这一类系统称为拟单调系统.

考虑如下的 n 维自治系统

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,\cdots,x_n), \quad i=1,\cdots,n. \tag{4.4}$$

定义 4.1.6 系统 (4.4) 称为是拟单调系统，如果对于每一对 $i\neq j$, f_i 关于 x_j 为单调不减或不增.

对于两个函数向量 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$ 和 $\underline{x}=(\underline{x}_1,\cdots,\underline{x}_n)$, 我们引入两个辅助系统

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_i &= f_i(\bar{x}_i,[\bar{x}]_1,[\underline{x}]_2),\\ \dot{\underline{x}}_i &= f_i(\underline{x}_i,[\underline{x}]_1,[\bar{x}]_2),\end{aligned} \tag{4.5}$$

这里，$[\ ]_1$ 和 $[\ ]_2$ 分别表示 x 的分量使得 f_i 单调不减和单调不增.

我们可以推广 Kamake 定理得到了如下的

定理 4.1.7 如果 $\bar{x}(0)\geqslant\underline{x}(0)$, 则对所有的 $t>0$ 有， $\bar{x}(t)\geqslant\underline{x}(t)$.

证明 首先，假设 $\overline{x}(0)$ 和 $\underline{x}(0)$ 是强有序的，即

$$\overline{x}(0)>\underline{x}(0).$$

令 $v(t)=\overline{x}(t)-\underline{x}(t)$. 由 $\overline{x}(t)$ 及 $\underline{x}(t)$ 的连续性，存在一个 $t_0>0$, 使得对于所有的 $t\in[0,t_0)$, 有

$$v_i(t)>0, \quad i=1,\cdots,n.$$

现在我们证明对于任意的 $T<T_x$, 当 $t\in[0,T]$ 时，有 $v_i(t)>0$. 否则的话，即存在一个 i 使得对于 $t\in[0,T_x)$ 有 $v_i(t)>0$ 不成立，这里 $[0,T_x)$ 是解的最大存在区间. 在这种情形，令

$$t_1=\inf\{t|v_i(t)=0\}>0,$$

则存在一个 i, 使得

$$\begin{aligned}&v_i(t)\begin{cases}=0, t=t_1,\\ >0, t\in[0,t_1),\end{cases}\\ &v_j(t)>0, t\in[0,t_1], j\neq i.\end{aligned}$$

由 f_i 的光滑性，存在一个 $L_i > 0$ 使得对于 $t \in [0, t_1]$ 有

$$|f_i(\overline{x}_i, [\overline{x}]_1, [\underline{x}]_2) - f_i(\underline{x}_i, [\overline{x}]_1, [\underline{x}]_2)| \leqslant L_i|\overline{x}_i - \underline{x}_i|.$$

因此，在区间 $[0, t_1]$ 上，我们有

$$\begin{aligned}
&\dot{v}_i(t) + L_i v_i(t)\\
= &f_i(\overline{x}_i, [\overline{x}]_1, [\underline{x}]_2) - f_i(\underline{x}_i, [\underline{x}]_1, [\overline{x}]_2) + L_i(\overline{x}_i - \underline{x}_i)\\
= &f_i(\overline{x}_i, [\overline{x}]_1, [\underline{x}]_2) - f_i(\underline{x}_i, [\overline{x}]_1, [\underline{x}]_2) + L_i(\overline{x}_i - \underline{x}_i) +\\
&f_i(\underline{x}_i, [\overline{x}]_1, [\underline{x}]_2) - f_i(\underline{x}_i, [\overline{x}]_1, [\overline{x}]_2) +\\
&f_i(\underline{x}_i, [\overline{x}]_1, [\overline{x}]_2) - f_i(\underline{x}_i, [\underline{x}]_1, [\overline{x}]_2) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

也就是

$$(v_i(t)\exp(L_i t))' \geqslant 0.$$

因此，

$$v_i(t_1) \geqslant (\overline{x}_i(0) - \underline{x}_i(0))\exp(-L_i t_1) > 0.$$

这与 $v_i(t_1) = 0$ 矛盾．根据解对初值条件的依赖性，定理得以证明．

显然，Smith 的结论 (定理 4.1.4) 也为定理 4.1.7 的推论．而如何将 Selgrade 定理 (定理 4.1.3) 推广到拟单调系统还是一个未解决的问题．

4.2 共存系统的永久性

考虑 R^n_+ 上的 n 维系统

$$\dot{x} = F(x) \tag{4.6}$$

我们将结合单调系统理论以及 mrealroot 算法讨论系统 (4.6) 的永久性和全局稳定性．为此，我们需要如下的

定义 4.2.1 如果存在位于 R^n_+ 内部的紧集 E 使得 R^n_+ 内部的所有解最终进入 E, 则系统 (4.6) 称为是永久生存的．

等价地，永久生存表示存在 $K > 0$, 当 $x_i(0) > 0 (i = 1, \cdots, n)$ 时，有

$$K < \lim_{t\to\infty}\inf x_i(t)$$

且

$$\lim_{t\to\infty}\sup x_i(t) < \frac{1}{K}.$$

特别地，如果 E 仅含 (4.6) 的一个平衡点 x^*, 则 x^* 为全局吸引的. 对于单调系统来说，全局吸引性与全局稳定性是相同的.

考虑两种群 Lotka-Volterra 共存的离散扩散系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(r_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + D_1(y_1 - x_1),\\ \dot{x}_2 &= x_2(r_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + D_2(y_2 - x_2),\\ \dot{y}_1 &= y_1(\bar{r}_1 + \bar{a}_{11}y_1 + \bar{a}_{12}y_2) + \bar{D}_1(x_1 - y_1),\\ \dot{y}_2 &= y_2(\bar{r}_2 + \bar{a}_{21}y_1 + \bar{a}_{22}y_2) + \bar{D}_2(x_2 - y_1),\end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 a_{ii} 和 $\bar{a}_{ii}$ 为负，而 a_{ij} 和 $\bar{a}_{ij}(i \neq j)$ 为正. 容易验证系统 (4.7) 为共存系统. 系统 (4.7) 在原点的 Jacobi 矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} r_1 - D_1 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & r_2 - D_2 & 0 & D_2 \\ \bar{D}_1 & 0 & \bar{r}_1 - \bar{D}_1 & 0 \\ 0 & \bar{D}_2 & 0 & \bar{r}_2 - D_2 \end{pmatrix}.$$

定理 4.2.2 系统 (4.7) 为永久生存当且仅当 $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ 和 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{2\times 2}$ 稳定，而 D 不稳定.

由定理 4.2.2 可得

推论 4.2.3 系统 (4.7) 为全局稳定的当且仅当其为永久生存且正平衡点惟一.

这样，一个永久生存的共存系统的全局稳定性就化为了关于正平衡点惟一性与否的判定. 一个自然的问题是 (4.7) 的永久生存性是否蕴含全局稳定性. 如下的例子说明永久性一般并不蕴含全局稳定性.

例 4.2.4 具有多个正平衡点的永久生存系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(13 - 130x_1 + 31x_2) + 12(y_1 - x_1),\\ \dot{x}_2 &= x_2(13 + 531x_1 - 130x_2) + 231(y_2 - x_2),\\ \dot{y}_1 &= y_1(13 - 130y_1 + 531y_2) + 231(x_1 - y_1),\\ \dot{y}_2 &= y_2(13 + 31y_1 - 130y_2) + 12(x_2 - y_2).\end{aligned} \tag{4.8}$$

利用 mrealroot 算法，以 $[x_1, x_2, y_1, y_2]$ 为序，我们可以给出 (4.8) 的所有实零点 (见附录), 其中 $(x_*, y_*) = (1,3;3,1)$, $(x^*, y^*) = (2,7;7,2)$, $(x_{**}, y_{**}) = \frac{1}{439}$ (138,253;253,138) 是所有的三个正平衡点. 我们可以验证该系统的永久生存性，而由于正平衡点的不惟一，所以系统不具有全局稳定性.

4.3 竞争系统的永久性

考虑如下两种群竞争扩散系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}y_1) + D_1(x_2 - x_1),\\ \dot{x}_2 &= x_2(r_2 - a_{21}x_2 - a_{22}y_2) + D_2(x_1 - x_2),\\ \dot{y}_1 &= y_1(\bar{r}_1 - \bar{a}_{11}x_1 - \bar{a}_{12}y_1) + \bar{D}_1(y_2 - y_1),\\ \dot{y}_2 &= y_2(\bar{r}_2 - \bar{a}_{21}x_2 - \bar{a}_{22}y_2) + \bar{D}_2(y_1 - y_2).\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

显然， $R_+^2 \times R_+^2$ 关于系统 (4.9) 为不变的，而 (4.9) 为一 K 单调系统，因为其 Jacobi 矩阵具有形式 (4.4).

式 (4.9) 除了平凡平衡点 $E_0 = (0,0,0,0)$ 外，对于任意 $D_i > 0$, 在正 x 子空间存在平衡点 $E_x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, 0)$; 对于任意 $D_i > 0$, 在正 y 子空间存在平衡点 $E_y = (0,0,\bar{y}_1,\bar{y}_2)$. 系统 (4.9) 的永久性及全局稳定性依赖于边界平衡点 E_x 和 E_y 的稳定性. 以后假设 E_0, E_x 和 E_y 均为双曲的，即其 Jacobi 矩阵的特征值实部均不为零.

以 $\delta(M)$ 记矩阵 M 的谱，即 M 的特征值所构成的集合. M 的稳定性模数 $s(M)$ 为

$$s(M) = \max\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \delta(M)\}.$$

(4.9) 在 E_x 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_x) = \begin{bmatrix} j_{11} & D_1 & -a_{11}\bar{x}_1 & 0 \\ D_2 & j_{22} & 0 & -a_{22}\bar{x}_2 \\ 0 & 0 & j_{33} & \bar{D}_1 \\ 0 & 0 & \bar{D}_2 & j_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x(E_x) & -M_x \\ 0 & J_y(E_x) \end{bmatrix},$$

其中 $j_{11} = r_1 - 2a_{11}\bar{x}_1 - D_1$, $j_{22} = r_2 - 2a_{21}\bar{x}_2 - D_2$, $j_{33} = \bar{r}_1 - \bar{a}_{11}\bar{x}_1 - \bar{D}_1$, $j_{44} = \bar{r}_2 - \bar{a}_{21}\bar{x}_2 - \bar{D}_2$. 类似地， (4.9) 在 E_y 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_y) = \begin{bmatrix} J_x(E_y) & 0 \\ -M_y & J_y(E_y) \end{bmatrix}.$$

关于竞争系统有如下的

定理 4.3.1 系统 (4.9) 永久生存当且仅当 $S_x = S(J_y(E_x))$ 和 $S_y = S(J_x(E_y))$ 均为正 (边界平衡点不稳定). 进一步，如果正平衡点惟一，则 (4.9) 全局稳定.

利用定理 4.3.1, 我们考虑如下竞争系统的永久生存性

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(4 - x_1 - y_1) + d(x_2 - x_1),\\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - x_2 - y_2) + d(x_1 - x_2),\\ \dot{y}_1 &= y_1(3 - 2x_1 - y_1) + d(y_2 - y_1),\\ \dot{y}_2 &= y_2(3 - 2x_2 - y_2) + d(y_1 - y_2),\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中 $d > 0$ 为扩散常数. 系统 (4.10) 有两个边界平衡点 $E_x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2; 0, 0)$ 及 $E_x = (0, 0; 3, 3)$. 其中 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 满足

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(4 - \bar{x}_1) + d(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = 0,\\ \bar{x}_2(1 - \bar{x}_2) + d(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0.\end{aligned} \tag{4.11}$$

因为 Logistic 扩散系统总是全局稳定的，所以 $J(E_x)$ 的子矩阵 $J_x(E_x)$ 与 $J(E_y)$ 的子矩阵 $J_y(E_y)$ 总是稳定的. 故 $J(E_x)$ 与 $J(E_y)$ 的稳定性完全由 $J_y(E_x)$ 和 $J_x(E_y)$ 决定. 因为矩阵

$$J_x(E_y) = \begin{pmatrix} 1 - d & d \\ d & -2 - d \end{pmatrix}$$

之迹为 $-1 - 2d < 0$, 故 $J_x(E_y)$ 不稳定.

这样，系统 (4.10) 的永久性完全取决于 $J_y(E_x)$ 的稳定与否. 容易求得

$$J_y(E_x) = \begin{pmatrix} 3 - 2x_1 - d & d \\ d & 3 - 2x_2 - d \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

现在需要在条件 (4.11) 下给出 (4.12) 不稳定的充要条件. 利用 Sturm 理论，我们可以证明

定理 4.3.2 系统 (4.10) 永久生存的充要条件是

$$64d^5 + 168d^4 + 528d^3 - 488d^2 - 930d + 22 > 0. \tag{4.13}$$

近似地， (4.13) 为 $d < d^* \simeq 0.22267$. 而当 (4.13) 反号时，边界平衡点 E_x 为全局稳定.

4.4 竞争系统的全局稳定性

对于系统 (4.9), 永久生存一般不蕴含全局稳定. 而系统 (4.9) 的全局稳定性结论都是通过判定正平衡的惟一性得到的.

Goh 于 1980 年曾提出两个竞争扩散系统，利用计算机模拟，他猜想此二系统为全局稳定的. 1995 年，李天岩利用同伦算法验证了正平衡点的惟一性. 下面，我们将给出利用 mrealroot 算法处理的结果.

例 4.4.1

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(4 - x_1 - y_1) + 1/10(x_2 - x_1),\\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - x_2 - y_2) + 1/10(x_1 - x_2),\\ \dot{y}_1 &= y_1(3 - 2x_1 - y_1) + 1/10(y_2 - y_1),\\ \dot{y}_2 &= y_2(3 - 2x_2 - y_2) + 1/10(y_1 - y_2).\end{aligned} \tag{4.14}$$

容易验证 (4.14) 的边界平衡点不稳定，利用 mrealroot 算法得到系统右端多项式组的 12 组实解 (见附录), 与李天岩的计算结果吻合，且其中恰好存在惟一一组正解. 这样，定理 4.3.1 保证了系统 (4.14) 的全局稳定性.

例 4.4.2

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(2 - x_1 - y_1) + 1/2(x_2 - x_1),\\ \dot{x}_2 &= x_2(2 - x_2 - y_2) + 1/2(x_1 - x_2),\\ \dot{y}_1 &= y_1(5 - x_1 - 2y_1) + 1/2(y_1 - y_2),\\ \dot{y}_2 &= y_2(3/2 - x_2 - 2y_2) + 1/2(y_2 - y_1).\end{aligned} \tag{4.15}$$

系统 (4.15) 的边界平衡点不稳定，故由定理 4.3.1 必为永久生存. 这样，其全局稳定性完全取决于正平衡点的惟一与否. 利用 mrealroot 算法，我们得到系统 (4.15) 的 14 组实平衡点 (见附录), 且其中正平衡点惟一，与李天岩的计算结果吻合.

这样，利用系统的单调性质及实根分离算法，我们肯定地得到了 Goh 的两个扩散系统全局稳定的结论.

4.5 附 录

对系统 (4.8), (4.10) 和 (4.11) 分别调用 mrealroot 算法求解，我们可以得到如下结果:

系统 (4.8) 的六组实根 (实根分离区间的精度为 10^{-10}, 变元序为 $[x_1, x_2, y_1, y_2]$):

$$\Big[\Big[[2,2],[7,7],[7,7],[2,2]\Big];$$

$$\Big[[1,1],[3,3],[3,3],[1,1]\Big];$$

$$\Big[[0,0],[0,0],[0,0],[0,0]\Big];$$

$$\Big[[\tfrac{138}{493},\tfrac{138}{493}],[\tfrac{253}{493},\tfrac{253}{493}],[\tfrac{253}{493},\tfrac{253}{493}],[\tfrac{138}{493},\tfrac{138}{493}]\Big];$$

$$\Big[[0,0],[\tfrac{858993459}{8589934592},\tfrac{1717986919}{17179869184}],[0,0],[\tfrac{1717986917}{17179869184},\tfrac{214748365}{2147483648}]\Big];$$

$$\Big[[\tfrac{858993459}{8589934592},\tfrac{1717986919}{17179869184}],[0,0],[\tfrac{1717986917}{17179869184},\tfrac{214748365}{2147483648}],[0,0]\Big]\Big].$$

系统 (4.10) 的十二组实根 (实根分离区间的精度为 10^{-15}, 变元序为 $[x_1, x_2, y_1, y_2]$):

$$\Big[\Big[[0,0],[0,0],[0,0],[0,0]\Big];$$

$$\Big[[0,0],[0,0],[3,3],[3,3]\Big];$$

$$\Big[[0,0],[0,0],[\tfrac{407669068857749}{140737488355328},\tfrac{203834534428875}{70368744177664}],[\tfrac{-13604101462861}{140737488355328},\tfrac{-13604101462773}{140737488355328}]\Big];$$

$$\Big[[0,0],[0,0],[\tfrac{-13604101462831}{140737488355328},\tfrac{-6802050731415}{70368744177664}],[\tfrac{407669068857729}{140737488355328},\tfrac{407669068857761}{140737488355328}]\Big];$$

$$\Big[[\tfrac{547721868534657}{140737488355328},\tfrac{273860934267329}{70368744177664}],[\tfrac{-11231107186391}{35184372088832},\tfrac{-22462212389829}{70368744177664}],0,0],[0,0]\Big];$$

$$\Big[[\tfrac{553250243089995}{140737488355328},\tfrac{138312560772499}{35184372088832}],[\tfrac{42986727428605}{35184372088832},\tfrac{171946944584427}{140737488355328}],[0,0],[0,0]\Big];$$

$$\Big[[\tfrac{-3219702453095}{140737488355328},\tfrac{-1609851226547}{70368744177664}],[\tfrac{31576218231985}{35184372088832},\tfrac{63152543610771}{70368744177664}],[0,0],[0,0]\Big];$$

$$\Big[[\tfrac{542510614545557}{140737488355328},\tfrac{271255307272779}{70368744177664}],[\tfrac{30371384360973}{140737488355328},\tfrac{30371384651321}{140737488355328}],$$
$$[\tfrac{7153476332849}{140737488355328},\tfrac{894185721547}{17592186044416}],[\tfrac{173842754025609}{70368744177664},\tfrac{347685509144881}{140737488355328}]\Big];$$

$$\Big[[\tfrac{557052462336791}{140737488355328},\tfrac{69631557792099}{17592186044416}],[\tfrac{250453804619847}{140737488355328},\tfrac{250453873462795}{140737488355328}],$$
$$[\tfrac{-924380602149}{70368744177664},\tfrac{-1848485130487}{140737488355328}],[\tfrac{-46243830392309}{70368744177664},\tfrac{-180639954825}{274877906944}]\Big];$$

$$\Big[[\tfrac{-1797174237367}{35184372088832},\tfrac{-7188696949467}{140737488355328}],[\tfrac{281358976417039}{140737488355328},\tfrac{8792524747181}{4398046511104}],$$
$$[\tfrac{5227808220309}{140737488355328},\tfrac{5231311035365}{140737488355328}],[\tfrac{-155055835178941}{140737488355328},\tfrac{-77527820558187}{70368744177664}]\Big];$$

$$\Big[[\tfrac{-132256146767387}{140737488355328},\tfrac{-66128073383693}{70368744177664}],[\tfrac{-3009847135523}{70368744177664},\tfrac{-3009847134081}{70368744177664}],$$
$$[\tfrac{340886461839919}{70368744177664},\tfrac{85221615530989}{17592186044416}],[\tfrac{110472948345065}{35184372088832},\tfrac{441891793784553}{140737488355328}]\Big];$$

$$\Big[\big[\tfrac{-17471810856111}{17592186044416}, \tfrac{-139774486848887}{140737488355328}\big], \big[\tfrac{7221253451127}{70368744177664}, \tfrac{3610626727031}{35184372088832}\big], \big[\tfrac{171799122522317}{35184372088832}, \tfrac{343598245274211}{70368744177664}\big], \big[\tfrac{-23984416128519}{140737488355328}, \tfrac{-23984415993973}{140737488355328}\big]\Big]\Big].$$

系统 (4.11) 的十四组实根 (实根分离区间的精度为 10^{-12}, 变元序为 $[x_1, x_2, y_1, y_2]$):

$$\Big[\Big[[2,2],[2,2],[0,0],[0,0]\Big];$$

$$\Big[[0,0],[0,0],[0,0],[0,0]\Big];$$

$$\Big[[0,0],[0,0],\big[\tfrac{18806586567}{8589934592}, \tfrac{37613173135}{17179869184}\big], \big[\tfrac{-9121220423}{17179869184}, \tfrac{-9121220395}{17179869184}\big]\Big];$$

$$\Big[[0,0],[0,0],\big[\tfrac{40578689031}{17179869184}, \tfrac{5072336129}{2147483648}\big], \big[\tfrac{2272215285}{2147483648}, \tfrac{18177722309}{17179869184}\big]\Big];$$

$$\Big[[0,0],[0,0],\big[\tfrac{-441225419}{8589934592}, \tfrac{-882450837}{17179869184}\big], \big[\tfrac{4061683645}{8589934592}, \tfrac{8123367301}{17179869184}\big]\Big];$$

$$\Big[\big[\tfrac{23468137739}{17179869184}, \tfrac{5867034435}{4294967296}\big], \big[\tfrac{-6288269923}{17179869184}, \tfrac{-6288267189}{17179869184}\big], [0,0], [0,0]\Big];$$

$$\Big[\big[\tfrac{-1572067139}{4294967296}, \tfrac{-6288268555}{17179869184}\big], \big[\tfrac{11734067829}{8589934592}, \tfrac{23468139523}{17179869184}\big], [0,0], [0,0]\Big];$$

$$\Big[\big[\tfrac{8106745829}{17179869184}, \tfrac{4053372915}{8589934592}\big], \big[\tfrac{17378473291}{17179869184}, \tfrac{17378474161}{17179869184}\big], \big[\tfrac{18038672247}{8589934592}, \tfrac{2254834215}{1073741824}\big], \big[\tfrac{6199190097}{8589934592}, \tfrac{12398380369}{17179869184}\big]\Big];$$

$$\Big[\big[\tfrac{22008742687}{17179869184}, \tfrac{687773209}{536870912}\big], \big[\tfrac{25574701505}{8589934592}, \tfrac{51150815681}{17179869184}\big], \big[\tfrac{23723842345}{17179869184}, \tfrac{5931423535}{4294967296}\big], \big[\tfrac{-21684686823}{17179869184}, \tfrac{-10841906509}{8589934592}\big]\Big];$$

$$\Big[\big[\tfrac{6099143733}{4294967296}, \tfrac{24396574933}{17179869184}\big], \big[\tfrac{-9318385897}{17179869184}, \tfrac{-4659190145}{8589934592}\big], \big[\tfrac{-1907752257}{17179869184}, \tfrac{-953859733}{8589934592}\big], \big[\tfrac{3149642793}{4294967296}, \tfrac{12598972903}{17179869184}\big]\Big];$$

$$\Big[\big[\tfrac{33958849603}{17179869184}, \tfrac{8489712401}{4294967296}\big], \big[\tfrac{12121980961}{4294967296}, \tfrac{757628031}{268435456}\big], \big[\tfrac{4075894471}{17179869184}, \tfrac{4076247345}{17179869184}\big], \big[\tfrac{-8351961753}{8589934592}, \tfrac{-16700581181}{17179869184}\big]\Big];$$

$$\Big[\big[\tfrac{-8002549887}{17179869184}, \tfrac{-4001274943}{8589934592}\big], \big[\tfrac{15386091163}{8589934592}, \tfrac{30772190629}{17179869184}\big], \big[\tfrac{741494609}{17179869184}, \tfrac{185375419}{4294967296}\big], \big[\tfrac{-7236263387}{17179869184}, \tfrac{-3618131235}{8589934592}\big]\Big];$$

$$\Big[\big[\tfrac{-7118955485}{4294967296}, \tfrac{-28475821939}{17179869184}\big], \big[\tfrac{8001664513}{17179869184}, \tfrac{8001664583}{17179869184}\big], \big[\tfrac{25915933101}{8589934592}, \tfrac{1619745843}{536870912}\big], \big[\tfrac{-12801181381}{17179869184}, \tfrac{-12801181115}{17179869184}\big]\Big];$$

$$\Big[\big[\tfrac{-19735498591}{8589934592}, \tfrac{-39470997181}{17179869184}\big], \big[\tfrac{39146449581}{17179869184}, \tfrac{19573226367}{8589934592}\big], \big[\tfrac{56721491315}{17179869184}, \tfrac{56721501041}{17179869184}\big], \big[\tfrac{-11018898877}{8589934592}, \tfrac{-22037796955}{17179869184}\big]\Big]\Big].$$

注 释

Smith[61] (定理 4.3,4.4) 推广了 Kamake, Selgrad[60] (定理 4.1,4.2) 的结果. Kamake 定理 (定理 4.1) 的一般性推广由 [46] 给出. 4.2 的内容取自 [53]. 4.3 节和 4.4 节的例由 [64] 中给出. 李天岩利用同伦算法 [39] 最早给出数值结果，其保证了正平衡点的惟一性. 进一步的工作有 [47]. 对于多个种群的捕食和竞争系统的永久性及全局稳定性的计算机辅助证明，参阅 [45, 52].

第五章　三 次 系 统

平面系统的小扰动极限环, 在二次系统情形早已得出了完整的结果. 目前, 多数研究都集中在本章介绍的三次系统和下一章要介绍的 Liénard 系统上. 本章, 我们先给出焦点量的计算方法以及小扰动极限环的构造理论, 然后介绍几个具体的三次系统.

5.1　焦点量的计算

本节我们研究二维微分多项式系统的中心焦点问题, 即当线性部分为中心型, 非线性项不为零的情形. 对于这类系统, 我们要考虑的问题是, 平衡点是否是中心, 或者当平衡点是焦点时判定其重数. 常用的处理手法是构造该系统的 Liapunov 函数并求出其焦点量, 考察焦点量方程组的实根结构, 从而得出结论.

下面我们先介绍一下 Liapunov 函数和 Liapunov 稳定性.

考虑集合 $W \subset R^n$, $f: W \to R^n$ 连续可微, $\bar{x} \in W$ 为微分系统

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.1}$$

的平衡点.

定义 5.1.1　如果 U 是 $\bar{x}$ 的邻域, $U \subset W$, 有函数 $V: U \to R^1$ 在 U 上连续, 在 $U - \bar{x}$ 上可微, 满足:

1) 当 $x \neq \bar{x}$ 时, $V(x) > 0$, $V(\bar{x}) = 0$,

2) 当 $x \neq \bar{x}$ 时, $\dot{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t)) \leqslant 0$,

则函数 V 称为系统 (5.1) 的 Liapunov 函数;

如果当 $x \neq \bar{x}$ 时, V 还满足 $\dot{V} < 0$, 则称 V 为严格的 Liapunov 函数.

定理 5.1.2 (Liapunov 稳定性定理) 如果上述系统存在 Liapunov 函数 V, 则 $\bar{x}$ 是稳定的; 如果该 Liapunov 函数是严格的, 则 $\bar{x}$ 是渐近稳定的.

由该定理, 我们可以构造恰当的 Liapunov 函数来考虑系统平衡点邻域中解的局部性态.

计算焦点量, 普遍的做法是经一非退化线性变换将线性部分变为标准形式, 这在很多参考书上都有介绍. 容易知道, 在处理含参系数的系统时, 这种变换将会使得变换后的系统出现非有理函数系数的项, 这不利于进一步的论证. 所以, 我们在这里给出一般形式的平面系统的焦点量算法.

中心焦点型的平面微分系统具有如下形式：

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= f(y_1,y_2) = cy_1 + ay_2 + \sum_{k=2}^{\infty} \Phi_k(y_1,y_2),\\ \dot{y}_2 &= g(y_1,y_2) = by_1 - cy_2 + \sum_{k=2}^{\infty} \Psi_k(y_1,y_2),\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 a,b,c 满足 $-c^2-ab>0$, $\Phi_k(y_1,y_2)$, $\Psi_k(y_1,y_2)$ 是 k 次齐次多项式.

焦点量算法：

INPUT f,g,n

OOUTPUT $L(1),L(2),\cdots,L(n)$

BEGIN

$F_k=\sum_{i=0}^{k} a_{ki}y_1^{k-i}y_2^i$

FOR l from 3 to 2n+2 DO

$F(y_1,y_2):=-by_1^2+2cy_1y_2+ay_2^2+\sum_{k=3}^{l} F_k(y_1,y_2)$

IF l mod $2=1$ THEN

$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}|_* = \frac{\partial F}{\partial y_1}f + \frac{\partial F}{\partial y_2}g = 0$

eqns:= 由 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}|_*$ 得到的关于系数 a_{ki} 的线性方程组

solve(eqns, $\{a_{li}\}$)

ELSE

$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}|_* = \frac{\partial F}{\partial y_1}f + \frac{\partial F}{\partial y_2}g = L\Big(\frac{l}{2}-1\Big)y^l$

eqns:= 由 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}|_* - L\big(\big(\frac{l}{2}-1\big)\big)y^l$ 得到的关于系数 a_{ki} 的线性方程组

solve$\big($eqns, $\big\{a_{li}, L\big(\frac{l}{2}-1\big)\big\}\big)$

END IF

END FOR

RETURN$(L(1),\cdots,L(n))$

END

其具体过程如下：

为了计算焦点量，我们先假设其 Liapunov 函数具有如下形式：

$$F(y_1,y_2) = -by_1^2 + 2cy_1y_2 + ay_2^2 + \sum_{k=3}^{\infty} F_k(y_1,y_2), \tag{5.3}$$

其中 $F_k=\sum\limits_{i=0}^{k} a_{ki}y_1^{k-i}y_2^i$ 是 k 次齐次多项式. F_k 的系数待定. 设其满足

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = L(1)y_2^4 + L(2)y_2^6 + \cdots + L(n)y_2^{2n+2} + \cdots .$$

将 (5.2) 代入 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$, 有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.1)} = & \left(-2by_1 + 2cy_2 + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\right)\left(cy_1 + ay_2 + \sum_{k=2}^{\infty}\varPhi_k\right) + \\ & \left(2ay_2 + 2cy_1 + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{\partial F_k}{\partial y_2}\right)\left(by_1 - cy_2 + \sum_{k=2}^{\infty}\varPsi_k\right) \\ = & \sum_{k=2}^{\infty}\left[(2cy_2 - 2by_1)\varPhi_k + (2ay_2 + 2cy_1)\varPsi_k\right] + \\ & \sum_{k=3}^{\infty}\left[(by_1 - cy_2)\frac{\partial F_k}{\partial y_2} + (ay_2 + cy_1)\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\right] + \\ & \sum_{k\geqslant 2, m\geqslant 3}^{\infty}\left[\varPsi_k\frac{\partial F_m}{\partial y_2} + \varPhi_k\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\right] \\ = & L(1)y_2^4 + L(2)y_2^6 + \cdots + L(n)y_2^{2n+2} + \cdots.\end{aligned}$$

比较方程两边的系数，我们可以得到一个以 $a_{kj}(k=3,4,\cdots;j=0,\cdots,k)$ 和 $L(i)$ 为变量的线性方程组. 该线性方程组可以符号地求解，从而得到 $L(i)$ 关于系统 (5.2) 系数的表达式.

当 n 是奇数时，有

$$\begin{aligned}& -\left[(by_1 - cy_2)\frac{\partial F_n}{\partial y_2} + (ay_2 + cy_1)\frac{\partial F_n}{\partial y_1}\right] \\ = & \left[(2cy_2 - 2by_1)\varPhi_{n-1} + (2ay_2 + 2cy_1)\varPsi_{n-1}\right] + \\ & \sum_{k=3}^{n-1}\left[\varPsi_{n-k-1}\frac{\partial F_k}{\partial y_2} + \varPhi_{n-k-1}\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\right].\end{aligned}$$

当 n 是偶数时，有

$$\begin{aligned}& L(\frac{n}{2} - 1)y_2^n - \left[(by_1 - cy_2)\frac{\partial F_n}{\partial y_2} + (ay_2 + cy_1)\frac{\partial F_n}{\partial y_1}\right] \\ = & \left[(2cy_2 - 2by_1)\varPhi_{n-1} + (2ay_2 + 2cy_1)\varPsi_{n-1}\right] + \\ & \sum_{k=3}^{n-1}\left[\varPsi_{n-k-1}\frac{\partial F_k}{\partial y_2} + \varPhi_{n-k-1}\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\right].\end{aligned}$$

方程的右端仅仅依赖于 $F_3, F_4, \cdots, F_{n-1}$, 所以我们可以依次解出 F_n. 记方程的右端 $A_n = \sum_{k=0}^{n} b_k y_1^{n-k} y_2^k$, 我们有

当 $n=2m+1$ 时,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}-[c(n-2k)a_{nk}+(k+1)ba_{nk+1}+a(n-k+1)a_{nk-1}]y_1^{n-k}y_2^k\\=&\sum_{k=0}^{n}b_ky_1^{n-k}y_2^k.\end{aligned}$$

比较上面方程组的同类项的系数，有

$$c(n-2k)a_{nk}+(k+1)ba_{nk+1}+a(n-k+1)a_{nk-1}=-b_k,\qquad k=0,1,\cdots,n,$$

其中 $a_{n,-1}=a_{n,n+1}=0$.

该线性方程组的系数矩阵为

$$A_n=\begin{pmatrix}cn & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ an & c(n-2) & 2b & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a(n-1) & c(n-4) & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c(n-4) & b(n-1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & -c(n-2) & bn\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & -cn\end{pmatrix}.$$

其行列式为

$$\det(A_{2m+1})=[(2m+1)!!]^2(-c^2-ab)^{m+1}.$$

故该线性方程组是可解的，从而 F_n 得以确定.

当 n 为偶数时，方程具有形式

$$L(\frac{n}{2}-1)y_2^n-\sum_{k=0}^{n}[c(n-2k)a_{nk}+(k+1)ba_{nk+1}+a(n-k+1)a_{nk-1}]y_1^{n-k}y_2^k=\sum_{k=0}^{n}b_ky_1^{n-k}y_2^k.$$

类似的，我们得到

$$\begin{aligned}&c(n-2k)a_{nk}+(k+1)ba_{nk+1}+a(n-k+1)a_{nk-1}=-b_k,\ k=0,1,\cdots,n-1,\\&-L((\tfrac{n}{2}-1)+[c(-n)a_n+(n+1)ba_{n+1}+aa_{n-1}]=-b_n,\end{aligned}$$

其中 $a_{n,-1}=a_{n,n+1}=0$.

该线性方程组的系数矩阵为

$$A_n = \begin{pmatrix} cn & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ an & c(n-2) & 2b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(n-1) & c(n-4) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c(n-4) & b(n-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & -c(n-2) & bn & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & -cn & -1 \end{pmatrix}.$$

A_n 的秩为 $n+1$, 该线性方程组有 $n+2$ 个变量. 故其具有依赖于某个变量 a_i 的解. 为了简化计算, 我们令 $a_n=0$, 从而解出 F_n 的系数 a_i 和 $L(\frac{n}{2}-1)$. 这样求得的 $F(y_1,y_2)$ 为 Liapunov 函数, $L(k)$ 为第 k 阶 Liapunov 常数 (焦点量).

由 Liapunov 稳定性定理和 Hopf 分支理论, 这些焦点量可以用来决定原系统具有多少个小扰动极限环.

事实上, 由

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.2)} = L(1)y_2^4 + L(2)y_2^6 + \cdots + L(n)y_2^{2n+2} + \cdots$$

和 Liapunov 稳定性定理, 我们知道, 在原点的足够小的邻域内 Liapunov 函数 F 的导函数 $\dot{F}$ 的符号完全由第一个不为零的焦点量 $L(n)$ 决定. 如果对于任意的 i, 均有 $L(i)=0$, 则原点为中心. 又由 Hilbert 基定理, 存在一个 N, 只要使得前 N 阶焦点量等于零, 就可以保证原点是中心. 因此, 分析这前 N 个焦点量, 我们可以得到此系统为中心的充要条件; 同时, 此系统至多具有 N 个小扰动极限环. 但是, Hilbert 基定理仅仅给出了 N 的存在性, 构造性的给出 N 的工作还没有进展.

利用焦点量, 我们考虑一个系统小扰动极限环个数的下界, 即至少可以存在多少小扰动极限环的问题. 若存在 k, 使得 $L(1)=0,\cdots,L(k)=0, L(k+1)\neq 0$, 则原点为 $k+1$ 重细焦点. 如果扰动焦点量 $L(1)=0,\cdots,L(k)=0$ 的某一组实零点, 使得在该零点的邻域中有 $L(i)L(i+1)<0(i=1,\cdots,k)$, 则由 Hopf 分支理论知道在原点附近可以扰出 $k+1$ 个极限环.

5.2 小扰动极限环的构造

考虑如下中心焦点型的 $n(n \in N)$ 次多项式微分系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + P(x,y), \\ \dot{y} &= -x + Q(x,y), \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 均为次数不超过 n 的多项式, 多项式系统 (5.4) 的极限环个数及位置的确定问题是 Hilbert 第十六问题中的微分方程部分. 但是在 $n=2$, 即二次多项式情形，仍未解决．而与此相关的中心焦点判定问题，特别是利用焦点量 (或 Liapunov 常数) 构造小扰动极限环又是目前国际上所关注的问题.

如果记 n 次系统的小扰动极限环的最大个数为 $N_A(n)$, 现已知 $N_A(2)=3$, 即对于二次系统来说， $N_A(2)$ 的问题已经解决．近 10 年来围绕 $N_A(3)$, 有相当多的工作，虽离完全解决还有相当的距离，但对于几类特殊的三次系统，已有较完整的工作．查阅这方面的进展我们发现，关于小扰动极限环的构造，需要根据不同焦点量的结构，利用不同技巧寻求解答．一般来说，总是利用焦点量三角化之后解出主变元来达到目的．一个自然的问题就是，如果不能解出主变元，如何构造小扰动极限环？

下面我们将证明: 由焦点量构成的多项式组进行顺序三角化之后,利用 mrealroot 算法得到的实根分离区间，正好可以用来构造小扰动极限环.

我们知道，通过焦点量构造小扰动极限环总是在焦点量所对应的某一组实根的邻域中完成的．而每一焦点量在此实根的任一邻域中还必须变号．例如，已经求出如下的焦点量

$$\begin{aligned} &L(1)(a_1, a_2, \cdots, a_n), \\ &L(2)(a_1, a_2, \cdots, a_n), \\ &\qquad \cdots\cdots \\ &L(n)(a_1, a_2, \cdots, a_n), \\ &L(n+1)(a_1, a_2, \cdots, a_n). \end{aligned}$$

要证明它们在原点附近可以扰出 $n+1$ 个小扰动极限环，通常的做法是根据前 n 个焦点量 $\{L(1), \cdots, L(n)\}$ 解主变元实施三角化，得到三角化序列

$$\begin{aligned} &\overline{L}(1)(u_1, u_2, \cdots, u_n), \\ &\overline{L}(2)(u_2, u_3, \cdots, u_n), \\ &\qquad \cdots\cdots \\ &\overline{L}(n-1)(u_{n-1}, u_n), \\ &\overline{L}(n)(u_n). \end{aligned} \tag{5.5}$$

和主变元序列 ($u_1, \cdots, u_n$ 是 $a_1, \cdots, a_n$ 的某一排列),

$$\begin{aligned} u_1 &= Q_1(u_2, u_3, \cdots, u_n), \\ u_2 &= Q_2(u_3, \cdots, u_n), \\ &\cdots\cdots \\ u_{n-1} &= Q_{n-1}(u_n), \\ u_n &= Q_n = \text{常数}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

(很多时候，只能知道这个常数的存在性，并不能得到它的具体值).

首先证明 (5.6) 使得 $L(n+1) \neq 0$, 然后依次变动 $u_n, u_{n-1}, \cdots, u_1$. 要构造出第 $k(k=1,\cdots,n)$ 个小扰动极限环，只需

$$\overline{L}(n+2-k)\overline{L}(n+1-k) < 0, \overline{L}(i) = 0(i < k),$$

其中 $\overline{L}(n+1) = L(n+1)$. 最后，对 (5.4) 的一次项进行小扰动，得到第 $n+1$ 个小扰动极限环.

我们对原来的焦点量多项式组进行处理时，完全可能只得到三角化序列 (5.5) 而得不到主变元序列 (5.6). 例如，如果通过 $L(1)(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 不能解出任何主变元, 但完全可能通过伪除法等更一般的三角化方法对 $\{L(1), \cdots, L(n)\}$ 进行三角化. 此时，利用显式解出主变元的小扰动极限环构造方法就不再适用了.

而 mrealroot 算法恰好可以解决此类问题. 假设由 $\{L(1), \cdots, L(n)\}$ 得到了三角化序列 (5.5)

$$\begin{aligned} &\overline{L}(1)(u_1, u_2, \cdots, u_n), \\ &\overline{L}(2)(u_2, u_3, \cdots, u_n), \\ &\qquad\cdots\cdots \\ &\overline{L}(n-1)(u_{n-1}, u_n), \\ &\overline{L}(n)(u_n) \end{aligned}$$

和初式

$$I = \prod_i I_i.$$

利用 mrealroot 算法可以得到 (5.5) 的实根分离区间, 把使得 $L(n+1) = 0$ 或 $I = 0$ 的实根删去. 下面证明, 剩下的实根分离区间恰好可以用来构造小扰动极限环. 这里需要说明的是, 对于仅含一个变元的 $L(n)$, 我们是直接用 mrealroot 算法求解出来的, 在 $L(n)$ 是一个多项式的平方时, 在解的邻域内符号一定. 此时, 我们同样需要删除使得在任意邻域有 $L(n)(u^*)L(n+1)(u^*) > 0$ 的解. (因

为此时第 $n+1$ 个极限环不能通过变号扰出，而系统只能扰出 n 个极限环.) 在 mrealroot 算法中这也是非常容易实现的，判断 $L(n)(u)L(n+1)(u)$ 在实根区间端点 (对于有理实解需要对解做一个小扰动) 的符号，保留满足“ $-$ ”号的解即可.

我们知道，通过焦点量构造小扰动极限环总是在焦点量所对应的某一组实零点的邻域中完成的. 而每一焦点量在此实零点的任一邻域中还必须变号.

定义 5.2.1　设 $PS=\{f_i(x_1,\cdots,x_n)|i=1,\cdots,l\}$ 是一多项式组， $f\in K[x_1,\cdots,x_n]$, 称 PS 在点 $x^*\in \mathrm{Zero}(PS)$ 关于 f 是独立的，如果下述条件成立

i) x^* 在 R^n 中的每个开邻域包含一点 x, 使得 $f_l(x)f(x)<0$.

ii) $\mathrm{Zero}(f_1,\cdots,f_j)(2\leqslant j\leqslant l-1)$ 满足：如果 $x\in \mathrm{Zero}(f_1,\cdots,f_j)$ 且 $f_{j+1}(x)\neq 0$, 则任意 x 的邻域 W 中存在点 $\sigma\in \mathrm{Zero}(f_1,\cdots,f_{j-1})$, 使得 $f_j(\sigma)\cdot f_{j+1}\ (x)<0$.

iii) 如果 $x\in \mathrm{Zero}(f_1)$ 且 $f_2(x)\neq 0$, 则 x 的任意开邻域中存在点 σ, 使得 $f_1(\sigma)f_2(x)<0$.

定理 5.2.2　考虑具有初式为 $I=\prod\limits_{i=1}^{s}I_i$ 的焦点量多项式组

$$(LS)=\{L(1)(x_1,\cdots,x_n),\cdots,L(n)(x_1)\}$$

(已三角化), 设 $x^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)$ 是由 mrealroot 算法求出的 (LS) 的零点，且满足第 $n+1$ 个焦点量 $L(n+1)(x^*)\neq 0$ 和初式 $I(x^*)\neq 0$, 则焦点量组 (LS) 在 x^* 处关于 $L(n+1)$ 独立.

证明　由 mrealroot 算法可知，在 mrealroot 算法求出多项式组的实零点的邻域内必然可以通过扰动第 i 个焦点量的主变元使其具有正号或者负号. 现在具体考虑焦点量多项式组

$$(LS)=\{L(1)(x_1,\cdots,x_n),\cdots,L(n)(x_1),L(n+1)(x_1,\cdots,x_n)\},$$

$x^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)$ 是由 mrealroot 算法求出的 (LS) 前 n 个焦点量的零点. 由于 $L(n)(x_1^*)=0, L(n+1)(x_1^*,\cdots,x_n^*)\neq 0$, 且 $L(n)$ 在 x^* 的任一邻域中变号，所以，可以取得 x^* 邻域中点 $\bar{x}^*$, 使得 $L(n)(\bar{x}^*)L(n+1)(\bar{x}^*)<0$, (事实上，只需要扰动 x_1^* 即可), 即独立性定义中条件 i) 满足

现在假设 x^* 使得 $x^*\in \mathrm{Zero}(L(1),\cdots,L_i)$ $(i\leqslant k-1)$ 且 $L_{i+1}(x^*)\neq 0$. 由 mrealroot 算法，扰动 x^* 中 L_i 的主变元对应的分量，可以得到 $\bar{x}^*$, 使得 $L_i(\bar{x}^*)L_{i+1}(\bar{x}^*)<0$, 即独立性定义中条件 ii) 满足.

最后，对焦点量 $L(1)$ 和 $L(2)$, 同样有 $L(1)(x_1^*,\cdots,x_n^*)=0$, $L(2)(x_1^*,\cdots,x_{n-1}^*)\neq 0$, 扰动 x_n^*, 不难得到 $\bar{x}^*$, 使得 $L_1(\bar{x}^*)L_2(\bar{x}^*)<0$, 即独立性定义中条件

iii) 满足.

由上述知，焦点量 $L(1),\cdots,L(n)$ 在 x^* 处关于 $L(n+1)$ 独立.

定理 5.2.3 如果对于某组 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$, 前 n 个焦点量多项式组 $(LS)=\{L(1)(x_1,\cdots,x_n),\cdots,L(n)(x_1)\}$ 关于第 $n+1$ 个焦点量 $L(n+1)$ 独立，则对应的多项式微分系统在原点附近有 $n+1$ 个小扰动极限环.

证明 由 Hopf 分支理论知道：如果扰动焦点量 $L(1)=0,\cdots,L(k)=0$ 的某一组实零点，使得在该零点的邻域中有 $L(i)L(i+1)<0(i=1,\cdots,k)$, 则在原点附近可以扰出 $k+1$ 个极限环. 而由独立性的定义，显然有结论成立.

由上述两个定理，我们有如下结论：

定理 5.2.4 如果利用 mrealroot 算法求出的前 n 焦点量三角化后多项式组的一个解为 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$, 且使得所有初式和第 $n+1$ 个焦点量不为 0, 则对应的多项式微分系统在原点附近有 $n+1$ 个小扰动极限环.

5.3 Kolmogorov 系统

我们首先考虑如下的 Kolmogorov 系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=xf_1(x,y),\\ \dot{y}&=yf_2(x,y).\end{aligned}\tag{5.7}$$

当 f_1 和 f_2 均为一次函数时，系统 (5.7) 为两种群 Lotka-Volterra 系统，其孤立闭轨 (极限环) 是不存在的. 当 f_1 和 f_2 均为二次函数时，系统 (5.7) 可以存在多个极限环. 当二次函数 f_1 和 f_2 均可以分解成一次因式的乘积，该系统不为捕食型系统. 另一方面， Coleman(1980) 提出如下的 **问题**: Kolmogorov 食饵 - 捕食者系统是否可能存在两个或多个稳定极限环？

现在，我们构造如下系统，给此问题一个肯定的回答.

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x(-2-a_0+a_1+a_0x-2a_1x+y+a_1x^2+xy),\\ \dot{y}&=y(2+a_2-x-y-2a_2y+a_2y^2),\end{aligned}$$

其中， $a_1>0,a_2>0$. 显然， $(1,1)$ 是该系统的一个平衡点. 作变换

$$x\mapsto x+1,\qquad y\mapsto y+1,$$

则原系统变为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(x+1)(x+a_0x+2y+a_1x^2+xy),\\ \dot{y}&=(y+1)(-x-y+a_2y^2).\end{aligned}\tag{5.8}$$

当 $a_0=0$ 时，$(0,0)$ 为中心型平衡点. 系统 (5.8) 的前三个 Liapunov 值 $L(1), L(2)$, $L(3)$ 分别为

$$
\begin{aligned}
L(1)=&3a_2-a_2^2+2a_1-1+2a_1^2,\\
L(2)=&451a_2^2+546a_2a_1+427a_1^2-392a_2^2a_1-328a_2^3-\\
&472a_1^3+46a_2^3a_1-92a_2a_1^3+176a_2^2a_1^2+44-\\
&876a_2a_1^2+74a_2^4-648a_1^4-238a_2-182a_1,\\
L(3)=&-889784a_2^4-28184+3433278a_2a_1^2+944669a_2^3-\\
&1652639a_2^3a_1+1918142a_1^3-5270694a_2a_1^3-5028128a_2^2a_1^2-\\
&3163812a_1^4-579519a_2^2+221080a_1+196690a_2-1112353a_2a_1+\\
&2063089a_2^2a_1+499258a_1a_2^4+135384a_1^6+763936a_2a_1^5-\\
&338976a_2^3a_1^3+308.
\end{aligned}
$$

利用伪除法，我们得到

$$P(a_1,a_2)L(2)=Q(a_1,a_2)L(1)+L'(2)(a_2),$$

其中

$L'(2)=638a_2^3-709a_2^4-30a_2-139a_2^2+120a_2^5+8a_2^6+3$,

$P=8a_2^3-51a_2^2-12a_2^2a_1+32a_2a_1+55a_2-19-14a_1$,

Q 是 a_1 和 a_2 多项式.

由整序原理，有

$$\mathrm{Zero}(\{L(1),L(2)\})=\mathrm{Zero}(\{L'(2),L(1)\}/P).$$

调用 mrealroot( ),

$$\mathrm{mrealroot}([L'(2),L(1)],[a_2,a_1],1/10^{10},[L(3),P])$$

可得出如下几组解:

$$\left[\left[\frac{688939015}{8589934592},\frac{1377878031}{17179869184}\right],\quad \left[\frac{5077638577}{17179869184},\frac{5077638579}{17179869184}\right],-,-\right],$$

$$\left[\left[\frac{688939015}{8589934592},\frac{1377878031}{17179869184}\right],\quad \left[-\frac{22257507763}{17179869184},-\frac{22257507761}{17179869184}\right],\ -,\widetilde{0}\right],$$

$$\left[\left[-\frac{2985891391}{17179869184},-\frac{1492945695}{8589934592}\right],\quad \left[\frac{8810195803}{17179869184},\frac{8810195805}{17179869184}\right],+,-\right],$$

$$\left[\left[-\frac{84633102747}{4294967296},-\frac{338532410987}{17179869184}\right],\left[-\frac{265975581777}{17179869184},-\frac{265975581775}{17179869184}\right],\ -,\widetilde{0}\right],$$

$$\left[\left[\frac{62789278049}{17179869184},\frac{31394639025}{8589934592}\right],\quad \left[\frac{7689817571}{8589934592},\frac{15379635145}{17179869184}\right],+,-\right],$$

$$\Big[\Big[-\frac{84633102747}{4294967296}, -\frac{338532410987}{17179869184}\Big], \quad \Big[\frac{248795712591}{17179869184}, \frac{248795712593}{17179869184}\Big], +, -\Big],$$

$$\Big[\Big[\frac{62789278049}{17179869184}, \frac{31394639025}{8589934592}\Big], \quad \Big[-\frac{32559504329}{17179869184}, -\frac{16279752163}{8589934592}\Big], \ -, \widetilde{0}\Big],$$

$$\Big[\Big[-\frac{2985891391}{17179869184}, -\frac{1492945695}{8589934592}\Big], \quad \Big[-\frac{25990064989}{17179869184}, -\frac{25990064987}{17179869184}\Big], \ -, \widetilde{0}\Big].$$

由定理 5.2.3, 只要 $\{L'(2)=0, L(1)=0\}$ 与 $L(3)(<0)$ 独立, $P\neq 0$, 则系统 (5.8) 在 $(0,0)$ 附近就会出现三个小扰动极限环, 且其中两个是稳定的. 再考虑条件 $a_1>0, a_2>0$, 可知第一组解就正是我们所需要的解.

再考虑可以分解为一次因式的三次 Kolmogorov 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x-2y+2)(Ax+y+B), \\ \dot{y} &= y(2x-y-2)(Dx+y+C). \end{aligned} \tag{5.9}$$

显然 $(2,2)$ 为 (5.9) 的一个平衡点. 作变换 $x\mapsto x+2, \quad y\mapsto y+2$, 则原来的平衡点 $(2,2)$ 移到了 $(0,0)$. 要使得 $(0,0)$ 是中心焦点型, 还需有 $D=A+\dfrac{B}{2}-\dfrac{C}{2}$, 将其代入变换后的系统, (5.9) 变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x+2)(x-2y)(A(x+2)+y+2+B), \\ \dot{y} &= (y+2)(2x-y)\Big(A+\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\Big)(x+2+y+2+C). \end{aligned} \tag{5.10}$$

在原点 $(0,0)$, 系统 (5.10) 的前四个 Liapunov 值 $\{L(1), L(2), L(3), L(4)\}$ 以 $(C\prec A\prec B)$ 为序整理如下:

$$\begin{aligned} L(1) &= (4+C)(C-B)I_1^{-1}=0, \qquad (C=-4) \\ L(2) &= (B+4)L'(2)(A,B)I_1^{-3}, \\ L(3) &= -(B+4)L'(3)(A,B)I_1^{-5}, \\ L(4) &= -(B+4)L'(4)(A,B)I_1^{-7}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= 2+B+2A, \\ L'(2) &= -3B^2+4AB-22B+28A^2+56A, \\ L'(3) &= -105B^4+399B^3-732AB^3+700A^2B^2+11974B^2- \\ &\quad 3260B^2A+23432B-3328AB-4156A^2B+10992A^3B+ \\ &\quad 15680A^4+16144A^3-54992A^2-49120A, \\ L'(4) &= -455667576B^2+1775326848A^2+4144509B^4+98851968AB+ \\ &\quad 1121419776A-554428032B+261493120A^6+140045728A^4B^2+ \end{aligned}$$

$335421344A^5B - 7796008A^2B^4 + 9978928A^3B^3 - 2041406A^5B-$
$1060805952A^4 + 245237B^5 + 103020492AB^3 - 556681584A^3B+$
$189909900A^2B^2 - 100968856A^3B^2 - 22648000A^2B^3 - 32132336A^4B+$
$1193998AB^4 + 175826816A^5 - 152346B^6 + 570176880A^2B+$
$8917872B^2A - 125665728A^3 - 97339542B^3.$

利用伪除法对 $\{L'(2)(A,B), L'(3)(A,B)\}$ 进行处理得

$$P(A,B)L'(3)(A,B) = Q(A,B)L'(2)(A,B) + L''(3)(B),$$

其中

$$\begin{aligned} L''(3)(B) = {} & 5639949B^8 - 158890977B^7 - 9906667659B^6 - 118203801471B^5 - \\ & 407483203554B^4 + 118362692448B^3 + 417384231264B^2, \\ P(A,B) = {} & 18252402AB^3 + 309080730B^2A + 1053193848AB - 3997665B^4 - \\ & 132974583B^3 - 759844470B^2 + 403771368B, \end{aligned}$$

$Q(A,B)$ 为关于 A, B 的多项式.

现在需证 $\{L''(3), L''(2)\}$ 有实根使得 $L'(4) \neq 0, I_1 \neq 0, P(A,B) \neq 0, B+4 \neq 0$.

调用 mrealroot( ),

$$\text{mrealroot}([L''(3), L'(2)], [B, A], 1/10^{20}, [L'(4), I_1, P, B+4])$$

得出四组解

$$\left[\left[-\frac{2573675109802661915841}{1475739525896764129 28}, -\frac{402136735906665924 35}{2305843009213693952}\right],\right.$$

$$\left.\left[-\frac{1183730637891661183}{288230376151711744}, -\frac{3030350433002652628 47}{7378697629483820646 4}\right], +, +, -, -\right],$$

$$\left[\left[-\frac{29062859079743425903 5}{36893488147419103232}, -\frac{116251436318973703613 9}{147573952589676412928}\right],\right.$$

$$\left.\left[\frac{145450142956256898121}{73786976294838206464}, \frac{727250714781284490 63}{36893488147419103232}\right], -, +, -, -\right],$$

$$\left[\left[-\frac{127894760625146550555 1}{147573952589676412928}, -\frac{639473803125732752775}{73786976294838206464}\right],\right.$$

$$\left.\left[\frac{801518342605238188 41}{36893488147419103232}, \frac{200379585651309547 11}{9223372036854775808}\right], -, +, -, -\right],$$

$$\left[\left[-\frac{1278947606251465505551}{1475739525896764129 28},-\frac{639473803125732752775}{737869762948382064 64}\right],\right.$$

$$\left.\left[\frac{1173301997102876793 15}{1475739525896764129 28},\frac{586650998551438396 61}{737869762948382064 64}\right],-,+,-,-\right].$$

这四组参数条件均使得原系统在平衡点 (2,2) 有四个小扰动极限环.

5.4 Kukles 系统

1944 年，前苏联数学家 Kukles 考虑了如下的三次系统 (以后人们就把该系统称为 Kukles 系统)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= -x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3\\ &\quad +a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3,\end{aligned} \tag{5.11}$$

并给出原点为中心的充要条件：

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \alpha = a_{30}a_{11}^2 + a_{21}\lambda = 0,\\
&\qquad \beta = (3a_{03}\lambda + \lambda^2 + a_{12}a_{11}^2)a_{21} - 3a_{03}\lambda^2 - a_{12}a_{11}^2\lambda = 0,\\
&\qquad \gamma = \lambda + a_{20}a_{11} + a_{21} = 0,\\
&\qquad \delta = 9a_{12}a_{11}^2 + 2a_{11}^4 + 9\lambda^2 + 27a_{03}\lambda = 0;\\
&(2) \quad a_{03} = \alpha = \beta = \gamma = 0;\\
&(3) \quad a_{03} = a_{11} = a_{21} = 0;\\
&(4) \quad a_{03} = a_{02} = a_{20} = a_{21} = 0.
\end{aligned}$$

其中 $\lambda = a_{02}a_{11} + 3a_{03}$.

长期以来，人们一直认为这个结论是对的，甚至还把它写进了教科书. 到了 1978 年，另一位前苏联数学家 Cherkas 发现该结论并不完善. 他给出一个中心成立的充分条件：把 Kukles 条件中的 (1) 修改为 (1′), 其余不变.

$$\begin{aligned}
&(1') \ \gamma = 0,\\
&\quad \theta_1 = 9(6a_{20}a_{03} + a_{20}a_{11}a_{02} - a_{21}a_{02} - a_{11}a_{12} - 2a_{30}a_{11}) - 2a_{11}^3 = 0,\\
&\quad \theta_2 = 3(6a_{30}a_{03} - 3a_{20}^2a_{03} + a_{30}a_{11}a_{02} + a_{20}a_{02}a_{21}+\\
&\qquad\qquad a_{20}a_{12}a_{11} - a_{21}a_{12} - a_{30}a_{21}) - 2a_{11}^3a_{21} = 0,\\
&\quad \theta_3 = 3(a_{30}a_{21}a_{02} - 6a_{20}a_{30}a_{03} + a_{30}a_{11}a_{12} + a_{20}a_{21}a_{12}) - 2a_{11}a_{21}^2 = 0,\\
&\quad \theta_4 = 9(a_{30}a_{21}a_{12} - 3a_{03}^2a_{03}) - 2a_{21}^3 = 0.
\end{aligned}$$

系统 (5.11) 的一组特殊系数关系：

$$a_{11}=a_{12}=0,\quad a_{21}=-3a_{03},\quad a_{20}=-\frac{a_{02}}{2},\quad a_{30}=-\frac{a_{02}^2}{12}$$

不满足 Kukles 条件，但使得原点是 (5.11) 的中心．随后， Christopher 等人继续对此进行研究，得出了另一个原点是 (5.11) 的中心的条件．王东明利用特征集法． Gröbner 基法对这些结论进行了综合分析发现， Cherkas 的结论是目前为止最完善的，它包含了后人得出的所有结论．

下面，我们利用 mrealroot 算法给出 Kukles 系统小扰动极限环的构造．我们首先计算 Kukles 系统的第一个焦点量，

$$L(1)=a_{21}+a_{02}a_{11}+a_{11}a_{20}+3a_{03}.$$

令 $L(1)=0$, 我们得到 $a_{21}=-a_{02}a_{11}-a_{11}a_{20}-3a_{03}$, 代回 (5.11),

$$\begin{aligned}&\dot{x}=y,\\&\dot{y}=-x+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{30}x^3+a_{21}xy^2+\\&\qquad(-a_{02}a_{11}-a_{11}a_{20}-3a_{03})x^2y+a_{03}y^3.\end{aligned}\tag{5.12}$$

再计算第二个焦点量，

$$\begin{aligned}L(2)=\;&2a_{20}a_{11}a_{12}-8a_{20}a_{02}^2a_{11}+2a_{02}a_{11}a_{12}-5a_{02}a_{11}a_{20}^2+\\&4a_{02}a_{11}a_{30}-3a_{11}a_{02}^3-2a_{11}^2a_{03}-24a_{20}a_{02}a_{03}+5a_{20}a_{11}a_{30}-\\&15a_{20}^2a_{03}-9a_{30}a_{03}-9a_{03}a_{02}^2-3a_{03}a_{12}.\end{aligned}$$

如果把 $\{a_{20},a_{11},a_{02}\}$ 分别看成一次的，把 $\{a_{30},a_{12},a_{03}\}$ 分别看成二次的，我们发现 $L(2)$ 实际上是一个齐次多项式．下面我们分两种情况考虑：

1. $a_{20}=a_{11}=a_{02}=0$. 此时，问题变得很简单，容易证明它有且至多有三个小扰动极限环．

2. $\{a_{20},a_{11},a_{02}\}$ 不全为零．不妨设 $a_{20}\neq 0$(实际上，若 $a_{11}\neq 0$ 或者 $a_{02}\neq 0$, 后面的操作几乎都是一样的，有兴趣的读者可以试试), 对 (5.12) 作代换

$a_{11}=a_{20}b_{11}, a_{02}=a_{20}b_{02}, a_{30}=a_{20}^2b_{30}, a_{12}=a_{20}^2b_{12}, a_{03}=a_{20}^2b_{03}.$

然后计算出前七个焦点量：

$$\begin{aligned}&L(1)=0,\\&L(2)=-a_{20}^4L'(2)(b_{11},b_{02},b_{30},b_{12},b_{03}),\\&L(3)=a_{20}^6L'(3)(b_{11},b_{02},b_{30},b_{12},b_{03}),\\&L(4)=-a_{20}^8L'(4)(b_{11},b_{02},b_{30},b_{12},b_{03}),\\&L(5)=a_{20}^{10}L'(5)(b_{11},b_{02},b_{30},b_{12},b_{03}),\\&L(6)=-a_{20}^{12}L'(6)(b_{11},b_{02},b_{30},b_{12},b_{03}),\\&L(7)=a_{20}^{14}L'(7)(b_{11},b_{02},b_{30},b_{12},b_{03}),\end{aligned}$$

其中 $L'(2),L'(3),L'(4),L'(5),L'(6),L'(7)$ 分别是 13, 49, 131, 292, 577, 1046 项的多项式. 因为变元 $a_{20}\neq 0$, 且在 $L(i)(i=2,\cdots,7)$ 中均为偶次方，所以，对极限环的小扰动没有影响. 现在的独立变元只有 $b_{11},b_{02},b_{30},b_{12},b_{03}$ 五个，再结合 $L(0)=0,L(1)=0$, 我们可以得到

定理 5.4.1 当 $a_{20}\neq 0$ 时， Kukles 系统在原点附近至多有七个小扰动极限环.

也可直接利用结式法证明定理 5.4.1.

要证明 Kukles 系统确实可以有七个小扰动极限环，需要证明

$$\{L'(2),L'(3),L'(4),L'(5),L'(6)\}$$

至少有一组关于 $\{b_{11},b_{02},b_{30},b_{12},b_{03}\}$ 的根，使得 $L'(7)\neq 0$, 这是不太容易的. 目前，对这个问题的所有考虑都是针对约化 Kukles 系统进行的，即令其中的部分系数为零. 下面，我们考虑两种典型的情形：

情形 1 $b_{03}=0$, 即 $a_{03}=0$.

此时 $\{L'(2),L'(3),L'(4),L'(5)\}$ 以 $b_{12}\prec b_{30}$ 为序约化得

$L'(2)=-b_{11}(I_1b_{12}-8b_{02}^2-5b_{02}+4b_{02}b_{30}-3b_{02}^3+5b_{30})$,

$L'(3)=b_{11}I_2(I_4I_5b_{30}+135b_{02}^3+135b_{02}+36b_{02}^4+199b_{02}^2+35)/I_1$,

$L'(4)=-b_{11}I_2I_3^3P_1(b_{02})/I_4^2$,

$L'(5)=b_{11}I_2I_3^3(-346I_4I_5P_1(b_{02})+P_2(b_{02}))/(I_4^3I_5)$,

其中

$$\begin{aligned}
I_1&=1+2b_{02},\\
I_2&=-b_{02}^2-b_{02}+b_{30},\\
I_3&=b_{02}+1,\\
I_4&=5b_{02}+4,\\
I_5&=4b_{02}+5,\\
P_1&=2664b_{02}^4+8505b_{02}^3+10185b_{02}^2+5425b_{02}+1085,\\
P_2&=7003152b_{02}^8+84800736b_{02}^7+360186741b_{02}^6+\\
&\quad\ 788292660b_{02}^5+1014259365b_{02}^4+\\
&\quad\ 801684240b_{02}^3+384490155b_{02}^2+\\
&\quad\ 103025580b_{02}+11864475.
\end{aligned}$$

当 $I_1\neq 0,I_2\neq 0,I_3\neq 0,I_4\neq 0,I_5\neq 0,b_{11}\neq 0$ 时，令

$$\begin{aligned}
b_{12}&=(8b_{02}^2+5b_{02}-4b_{02}b_{30}+3b_{02}^3-5b_{30})/I_2,\\
b_{30}&=-(135b_{02}^3+135b_{02}+36b_{02}^4+199b_{02}^2+35)/(I_4I_5).
\end{aligned}$$

此时有 $L'(2)=0,\quad L'(3)=0$. 又 $\mathrm{resultant}(P_2,P_1,b_{02})\neq 0$, 故当 $b_{03}=0$ 时，原系统至多有五个小扰动极限环.

下面我们利用 mrealroot () 证明： P_1 有零点使得 $P_2\neq 0,\quad I_1\neq 0,\quad I_2\neq 0,\quad I_3\neq 0,\quad I_4\neq 0,\quad I_5\neq 0$.

调用

$$\mathrm{mrealroot}([P_1],[b_{02}],1/10^{20},[P_2,I_1,I_2,I_3,I_4,I_5])$$

得到

$$\left[\left[-\frac{29710656938826646295}{36893488147419103232},-\frac{118842627755306585179}{147573952589676412928}\right],-,-,-,+,-,+\right],$$

$$\left[\left[-\frac{32947094652825833387}{36893488147419103232},-\frac{131788378611303333547}{147573952589676412928}\right],-,-,+,+,-,+\right].$$

所以当 $a_{03}=0$ 时，有两组参数条件使得系统 (5.12) 在原点有五个小扰动极限环.

情形 2 $\quad b_{11}=0$, 即 $a_{11}=0$.

此时 $\{L'(2),L'(3),L'(4),L'(5),L'(6)\}$ 以 $b_{12}\prec b_{03}$ 为序约化得

$$\begin{aligned}
L'(2)={}&8b_{02}+5+3b_{30}+3b_{02}^2+b_{12},\\
L'(3)={}&I_1+6b_{03}^2,\\
L'(4)={}&9690b_{30}-144420b_{02}-638784b_{02}^3-431898b_{02}^2-20916b_{30}b_{02}^3-\\
&192b_{30}b_{02}^2+480b_{02}b_{30}^2-199260b_{02}^5-240b_{30}^2-500886b_{02}^4+\\
&21012b_{02}b_{30}-31590b_{02}^6-240b_{02}^2b_{30}^2-9594b_{30}b_{02}^4-18090,\\
L'(5)={}&-434400b_{30}+10914120b_{02}+107465664b_{02}^3+46184964b_{02}^2+\\
&8271312b_{30}b_{02}^3+1387872b_{30}b_{02}^2-296532b_{02}b_{30}^2+\\
&134045640b_{02}^5-59586b_{30}^2+151864896b_{02}^4+\\
&2880b_{30}^3-1180692b_{02}b_{30}+\\
&2782350b_{02}^8+21714480b_{02}^7-5760b_{02}b_{30}^3+72241164b_{02}^6+\\
&286356b_{30}^2b_{02}^3+6740100b_{30}b_{02}^5-139104b_{02}^2b_{30}^2+\\
&11397768b_{30}b_{02}^4+1484856b_{30}b_{02}^6+208866b_{30}^2b_{02}^4+\\
&2880b_{02}^2b_{30}^3+1066530,\\
L'(6)={}&-2074535550b_{30}-23127850800b_{02}-333616924080b_{02}^3-\\
&112415787090b_{02}^2-9485881650b_{02}^{10}-82945620000b_{02}^9-\\
&261449348640b_{30}b_{02}^3-111964205340b_{30}b_{02}^2+\\
&3039909840b_{02}b_{30}^2-983934627120b_{02}^5+\\
&1274930460b_{30}^2-679536064020b_{02}^4-3806093580b_{30}^2b_{02}^6+\\
&14601600b_{02}b_{30}^4-71941855680b_{30}b_{02}^7-15864006960b_{30}^2b_{02}^5-
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&675461520b_{30}^3b_{02}^3-455253480b_{30}^3b_{02}^4-7300800b_{02}^2b_{30}^4-\\
&10781648730b_{30}b_{02}^8+176610600b_{30}^3-25461863280b_{02}b_{30}-\\
&317374544070b_{02}^8-702854266320b_{02}^7-7300800b_{30}^4+\\
&731028240b_{02}b_{30}^3-1005550447740b_{02}^6-\\
&19980101280b_{30}^2b_{02}^3-351763919280b_{30}b_{02}^5-\\
&4131790020b_{02}^2b_{30}^2-376449172200b_{30}b_{02}^4-2116563750-\\
&209355942180b_{30}b_{02}^6-26192217420b_{30}^2b_{02}^4+223076160b_{02}^2b_{30}^3,
\end{aligned}
$$

其中 $I_1=-35+38b_{30}-222b_{02}-270b_{02}^3-394b_{02}^2-10b_{30}b_{02}^2+6b_{30}^2-63b_{02}^4+20b_{02}b_{30}$.

当 $b_{12}=-(8b_{02}+5+3b_{30}+3b_{02}^2)$, $b_{03}^2=-I_1/6$(即 $L'(2)=0$, $L'(3)=0$) 时, $L'(4),L'(5)$ 有如下关系:

$$
P(b_{02},b_{30})L'(5)=Q(b_{02},b_{30})L'(4)+L''(5)(b_{02}),
$$

其中

$$
\begin{aligned}
P(b_{02},b_{30})=\,&2985984000(b_{02}-1)(25609086063b_{02}^9+2049908186076b_{02}^8+\\
&6948611854926b_{02}^7+704373480b_{30}b_{02}^7+12781410657486b_{02}^6+\\
&2689844040b_{30}b_{02}^6+13331410120266b_{02}^5+\\
&2612304360b_{30}b_{02}^5+6912278985546b_{02}^4-1776282360b_{30}b_{02}^4+\\
&4318955796b_{02}^3-4169992200b_{30}b_{02}^3-200861178156b_{02}^2-\\
&1349768040b_{30}b_{02}^2-101207531665b_{02}+852843320b_{02}b_{30}-\\
&16775708625+436677400b_{30}),\\
L''(5)(b_{02})=\,&-9674588160000(b_{02}+2)(53814673323b_{02}^{11}+372912314211b_{02}^{10}+\\
&1016248820130b_{02}^9+1209003930648b_{02}^8+338647352586b_{02}^7-\\
&1687346226846b_{02}^6-2064101527512b_{02}^5-961910086692b_{02}^4+\\
&70604716419b_{02}^3+275234670291b_{02}^2+113343401710b_{02}+\\
&15880264820)(b_{02}+1)^6,
\end{aligned}
$$

$Q(b_{02},b_{30})$ 是一个 33 项的多项式.

调用

$$
\mathrm{mrealroot}([L''(5),L'(4)],[b_{02},b_{30}],1/10^{20},[L'(6),P(b_3,b_4)])
$$

得到两组符合条件的解：

$$\left[\left[\frac{74851633325649710365}{147573952589676412928}, \frac{37425816662824855183}{73786976294838206464}\right],\right.$$

$$\left.\left[\frac{39817287809553834355901}{147573952589676412928}, \frac{39817287809553834360415}{147573952589676412928}\right], -, +\right],$$

$$\left[\left[\frac{16969261194742624430 9}{147573952589676412928}, \frac{84846305973713122155}{73786976294838206464}\right],\right.$$

$$\left.\left[-\frac{32957089667510660010909}{147573952589676412928}, -\frac{32957089667510660003217}{147573952589676412928}\right], +, +\right].$$

据此可知，当 $a_{11}=0$ 时，有两组参数条件使得系统 (5.12) 在原点附近的小扰动极限环可达六个.

5.5 一般三次系统

三次系统的小扰动极限环构造问题中,最好的结果是E.M.James 和 N.G.Llyod 在 1991 年给出的八个小扰动极限环. 1994 年，宁书城等人也考虑了同样的系统. 下面，我们结合 mrealroot 算法，统一的给出他们的结果.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_1x^2 - 2b_1xy + (a_3 - a_1)y^2 + \left(\frac{1}{2}b_6 + a_7 - a_9\right)x^2y + a_7y^3, \\ \dot{y} &= -x + b_1x^2 + 2a_1xy - b_1y^2 + b_4x^3 + b_5x^2y + \left(\frac{b_6}{2} - a_7 + a_9\right)xy^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

该系统的前八个 Liapunov 值为

$$\{L(1), L(2), L(3), L(4), L(5), L(6), L(7), L(8)\}.$$

作代换

$$b_1^2 = \frac{1}{2}(b_8 - a_8), a_1^2 = \frac{1}{2}(b_8 + a_8)(b_8 + a_8 > 0, b_8 - a_8 > 0),$$

并以 $b_5 \prec a_3 \prec a_7 \prec a_9 \prec b_8 \prec b_6 \prec a_8$ 为序整理如下：

$L(1) = b_5 + 4b_1a_3 = 0,\qquad$ (以下$b_5 = -4a_3b_1$),

$L(2) = b_1a_3(10a_3^2 - 4a_1a_3 + 2a_9 - 6b_4 - 3b_6 - 18a_7) = 0,\qquad$ (以下$a_3 = 0$),

$L(3) = -a_1b_1(a_7 + b_4)(2a_9 + 7b_4 - 9a_9) = 0,\qquad$ (以下$b_4 = -a_7$),

$L(4) = -a_9b_1a_1L'(4),$

$L(5) = -a_1b_1a_9^2L'(5)I_1^{-2},$

$$L(6) = -a_1 b_1 a_9^2 b_6^2 L'(6) I_1^{-1} I_2^{-2},$$
$$L(7) = -a_1 b_1 a_9^2 b_6^2 (QL'(6) - b_6 I_2(-115b_6^2 + 120a_8 b_6 + 144a_8^2)L'(7)) I_1^{-1} I_2^{-3} I_3^{-1},$$
$$L(8) = -a_1 b_1 a_9^2 b_6^2 I_1^4 L'(8) I_2^{-4},$$

其中

$$\begin{aligned}
L'(4) =& -80a_7a_8 + 20a_9a_8 - 13b_6a_9 + 60a_7b_6,\\
L'(5) =& 2688a_8^2b_8b_6 - 3456a_8b_8b_6^2 + 1080b_8b_6^3 - 3213a_9b_6^3 +\\
& 6720a_9a_8^3 + 12156a_9b_6^2a_8 - 15920b_6a_9a_8^2,\\
L'(6) =& 32514048000a_8^8 - 126959616000a_8^7b_6 + 101154816000a_8^6b_8^2 +\\
& 145767628800b_6^2a_8^6 + 63358156800b_6^3a_8^5 - 386452684800b_8^2a_8^5b_6 -\\
& 317760519680b_6^4a_8^4 + 643386818560b_8^2a_8^4b_6^2 -\\
& 599698341888b_8^2a_8^3b_6^3 + 341181857280b_6^5a_8^3 -\\
& 183226245120b_6^6a_8^2 + 327922713600b_8^2a_8^2b_6^4 -\\
& 98514155520b_8^2b_6^5a_8 + 51109833600b_6^7a_8 +\\
& 12530998080b_8^2b_6^6 - 5935937175b_6^8,\\
L'(7) =& 6796389777408000a_8^{10} - 54710177601945600b_6a_8^9 +\\
& 189178885785845760a_8^8b_6^2 - 373305922848817152a_8^7b_6^3 +\\
& 468662864676478976a_8^6b_6^4 - 393253612008267776b_6^5a_8^5 +\\
& 224404708247910912b_6^6a_8^4 - 86376324142126080b_6^7a_8^3 +\\
& 21565154418116400b_6^8a_8^2 - 3170683504210320b_6^9a_8 +\\
& 209810506950225b_6^{10},
\end{aligned}$$

$L'(8)$ 是一个 75 项的多项式,

$$\begin{aligned}
I_1 =& 4a_8 - 3b_6,\\
I_2 =& 6720a_8^3 + 12156a_8b_6^2 - 15920a_8^2b_6 - 3213b_6^3,\\
I_3 =& (1580544000a_8^6 - 6038323200b_6a_8^5 + 10052919040a_8^4b_6^2 -\\
& 9370286592b_6^3a_8^3 + 5123792400b_6^4a_8^2 - 1539283680b_6^5a_8 +\\
& 195796845b_6^6)^2 b_8,
\end{aligned}$$

Q 是一个 50 项的多项式.

为了证明系统 (5.5) 有八个小扰动极限环, 我们只需要找出 $\{L'(7), L'(6), L'(5), L'(4)\}$ (以 b_6, b_8, a_9, a_7 为变量) 的公根, 使得 $\{L'(8), I_3, I_1, I_2\}$ 均不等于零.

令参变量 $a_8 = 1$, 调用

$$\text{mrealroot}([L'(7), L'(6), L'(5), L'(4)], [b_6, b_8, a_9, a_7], 1/10^{25}[L'(8), I_1, I_2, I_3])$$

得到两组解:

$$\left[\left[\frac{1241666873504750715608230038203}{633825300114114700748351602688}, \frac{2483333747009501431216460076407}{1267650600228229401496703205376}\right],\right.$$

$$\left[\frac{3141592691256495395805375944621}{1267650600228229401496703205376}, \frac{1570796345628247697902688111561}{633825300114114700748351602688}\right],$$

$$\left[\frac{973720927066574613832697527O9}{633825300114114700748351602688}, \frac{1947441854133149227665432692 53}{1267650600228229401496703205376}\right],$$

$$\left.\left[\frac{2836096257513930582734633 7721}{1267650600228229401496703205376}, \frac{2836096257513930582735089 6305}{1267650600228229401496703205376}\right], -, -, -, +\right];$$

$$\left[\left[\frac{1439151367281003407784911341135}{1267650600228229401496703205376}, \frac{8994696045506271298655695 8821}{79228162514264337593543950336}\right],\right.$$

$$\left[\frac{1328588943596807949165929 2005}{990352031428304219919299 3792}, \frac{8502969239019570874661947 59453}{633825300114114700748351602688}\right],$$

$$\left[\frac{3896058664886345504197523 59329}{633825300114114700748351602688}, \frac{7792117329772691008395080 53943}{1267650600228229401496703205376}\right],$$

$$\left.\left[\frac{1718491970558927805271797 32779}{633825300114114700748351602688}, \frac{1718491970558927805271846 10945}{633825300114114700748351602688}\right], +, -, +, +\right].$$

此即说明有两组参数值使系统 (5.13) 具有 8 个小扰动极限环. 第一组对应 Lloyd 等人的结果, 第二组对应宁书城等人的结果.

在前面的 $L(3) = -a_1b_1(a_7+b_4)(2a_9+7b_4-9a_9)$ 中, 宁书城等人考虑了令 $2a_9+7b_4-9a_9=0$ 的情况, 并同样得出八个小扰动极限环. 我们用 mrealroot 算法, 明确得出了 21 组解.

令 $2a_9+7b_4-9a_9=0$, 有 $a_9=(9a_7-7b_4)/2$, 再以 $\prec a_8 \prec b_8 \prec b_6 \prec a_7$ 为序整理后面的焦点量. 当 $I_1, I_2, \cdots, I_{18}$ 都不等于零时, $L(4)=L(5)=L(6)=L(7)=0$ 等价于

$P_1(a_7) = \sum\limits_{i=0}^{74} c_i a_7^i = 0,$

$P_2(a_7, b_6) = 0$ (P_2 是 91 项多项式),

$P_3(a_7, b_6, b_8) = 0$ (P_3 是 70 项多项式, 可以解出主变元 b_8),

$$\begin{aligned} P_4(a_7, b_6, b_8, a_8) = & -21 - 16b_8 + 80a_8 + 39b_6 + 80a_7^2a_8 + 16a_7^2b_8 - \\ & 98a_7b_6 - 160a_7a_8 + 39a_7^2b_6 - 39a_7^2 - 39a_7 - 21a_7^3 \\ & \text{(可以解出主变元 } a_8\text{)}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= a_7^2 - 1, \\ I_1 &= a_7^2 + 1, \\ I_3 &= 830a_7^3 - 1013a_7^2b_6 + 1048a_7^2 + 2084a_7^2b_8 - 5000a_7b_8 + 1150a_7 + \\ &\quad 2658a_7b_6 + 92 + 2916b_8 - 1125b_6, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_4 = {} & 1023576a_7^3b_6 + 19098a_7b_6^2 + 281540a_7 - 46487a_7^4 - 281540a_7^5 - \\
& 1023576a_7^2b_6 - 3339b_6^2 - 19098a_7^3b_6^2 - 620592a_7^4b_6 + 620592a_7b_6 + \\
& 46487a_7^2 + 83832b_6a_7^5 + 3339a_7^4b_6^2 - 83832b_6 - 97531a_7^6 + 97531, \\
I_5 = {} & 97531a_7^5 - 83832a_7^4b_6 + 379071a_7^4 + 425558a_7^3 + 536760a_7^3b_6 - \\
& 3339a_7^3b_6^2 - 486816a_7^2b_6 + 15759a_7^2b_6^2 + 425558a_7^2 + 379071a_7 + \\
& 536760a_7b_6 + 15759a_7b_6^2 - 3339b_6^2 + 97531 - 83832b_6, \\
I_6 = {} & 1515423a_7^8 - 8873396a_7^7 + 12571020a_7^6 + 7629684a_7^5 - \\
& 26203862a_7^4 + 7629684a_7^3 + 12571020a_7^2 - 8873396a_7 + 1515423, \\
I_7 = {} & 3587386383a_7^9 - 26117640213a_7^8 + 59579696484a_7^7 - \\
& 24044535076a_7^6 - 87792410598a_7^5 + 105957956682a_7^4 + \\
& 4288246564a_7^3 - 63195972756a_7^2 + \\
& 33313737807a_7 - 5069470077, \\
I_8 = {} & -2171294795699946a_7 + 73783751987351392a_7^1 1 + \\
& 9864505443016665a_7^2 + 184374401918553 + \\
& 71802830905686408a_7^1 3 + \\
& 73783751987351392a_7^7 + 126797541514342774a_7^8 - \\
& 140895937342557236a_7^1 2 + 9864505443016665a_7^1 6 + \\
& 1663402136474764a_7^1 4 - 2171294795699946a_7^1 7 - \\
& 19541664691750880a_7^1 5 + 126797541514342774a_7^1 0 - \\
& 242986708691964988a_7^9 + 1663402136474764a_7^4 - \\
& 19541664691750880a_7^3 + 71802830905686408a_7^5 - \\
& 140895937342557236a_7^6 + 184374401918553a_7^1 8,
\end{aligned}
$$

$I_9, I_{10}, I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14}, I_{15}, I_{16}, I_{17}, I_{18}$ 分别是关于 a_7, b_6 的 57,39,115, 59, 195, 81, 279, 101, 363, 520 项多项式.

而 $L(8) = a_1b_1I_1^7I_5I_2^{-1}L'(8)(a_7, b_6)$, $L'(8)$ 是一个 520 项的多项式.

调用

$$
\text{mrealroot}([P_1, P_2], [a_7, b_6], 1/10^{50}, [L'(8), I_1, I_2, \cdots, I_{17}]),
$$

并结合 $b_8 + a_8 > 0, b_8 - a_8 > 0$ 得到 21 组解，其中一组如下：

$$
\Big[\Big[\frac{265982961558547258373103264702048379665530388657976077216993047144452825112348 27}{11857109937901178411373668864889641764174846429761593757640456602410304475129446 4},
\frac{66495740389636814593275816175512094916382597164494019304248261786113206278087 07}{29642774844752946028434172162224104410437116074403984394101141506025761187823616}\Big],
$$

$$
\Big[-\frac{65115174034123412781772280281832942952194616428994582574504734667669735567085902 3}{29642774844752946028434172162224104410437116074403984394101141506025761187823616},
-\frac{65115174034123412781772280281832942952194616428994582574504734667669735566205796 1}{29642774844752946028434172162224104410437116074403984394101141506025761187823616}\Big]\Big].
$$

注 释

5.1 节焦点量的计算考虑的情况与标准形式下的算法类似, 关于后者可参阅 [67], 5.2 节取自 [47]. 5.3 节中, Coleman 问题 [14] 的构造例取自 [48]. 5.9 式由 [42] 给出.

5.4 节中的 Kukles[37] 系统的讨论始于文 [35], [11] 以及 [6] , 最近 [6] 得到了 Kukles 系统存在双中心的充要条件.

5.5 节中总结了 20 世纪 90 年代关于三次系统的一些主要结果, 分别由 [34], [56] 和 [55] 给出.

第六章　Liénard 系统

在本章我们考虑 Liénard 系统的小扰动极限环问题. 自 20 世纪 70 年代, A. Lins, W. de Melo 和 C. C. Pugh 提出有关 $H(n,1)$ 的猜想以来 ($H(.,.)$ 表示极限环的最大个数, 后面用到的 $\hat{H}(.,.)$ 表示小扰动极限环的最大个数), Liénard 系统就一直是一个比较热门的研究课题, 到目前为止, 已经取得了非常大的进展.

6.1　基本结果

1922 年, Van der Pol 在研究真空管的振荡特性时, 考虑了如下形式的系统

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -x. \tag{6.1}$$

实际上, 这也就是 Liénard 系统的发端. 1928 年, Liénard 证明了当 $F(x)$ 是连续奇函数时, (6.1) 可以有惟一极限环. 之后几十年, 进展缓慢. 到了 1977 年, A. Lins, W. de Melo 和 C. C. Pugh 证明了当 $F(x)$ 是三次多项式时, 系统 (6.1) 有惟一极限环, 并提出如下猜想

猜想: 如果 $F(x)$ 是 $2n+1$ 或 $2n+2$ 次多项式, 则系统 (6.1) 至多有 n 个极限环.

随后, Liénard 系统的极限环个数问题引起了大家的注意, 人们开始对更一般的 Liénard 系统进行研究, 新结果也不断出现.

Liénard 系统的标准形式如下

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

这里我们考虑 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是多项式的情形. 如果记 $F'(x) = f(x)$, $\dot{y} = -g(x)$, 则上式可等价地记为

$$\dot{x} = y - F(x), \qquad \dot{y} = -g(x). \tag{6.2}$$

显然, (6.1) 只是它的一种特殊情况. 现在, 很多文献考虑更一般的如下系统

$$\dot{x} = \varphi(y) - F(x), \quad \dot{y} = -g(x),$$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的多项式. 本书中我们只考虑 (6.2) 型的 Liénard 系统.

我们用 $H(n,m)$ 表示系统 (6.2) 的极限环的最大个数， n,m 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的次数．除了前面提到的 $H(2,1)=1$ 外， 1998 年， Coppel 证明了 $H(1,2)=1$; 1996 年和 1997 年， Dumortier 和 Li 合作证明了 $H(1,3)=1$ 和 $H(2,2)=1$.

在考虑 Liénard 系统极限环问题的同时，很多学者考虑其中的小扰动极限环问题．在这方面已经取得了相当的进展.

类似于用 $H(.,.)$ 表示系统 (6.2) 的极限环的最大个数，我们用 $\hat{H}(.,.)$ 表示小扰动极限环的最大个数． Christopher C. 和 Lynch S. 得到的结果可概述为下面的表 1 和三个式子：

表 1

f 的次数 \ g 的次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$	48	49	50
50	↑	↑	38														
49	24	33	38														
48	24	32	36														
⋮	⋮	⋮	⋮														
13	6	9	10														
12	6	8	10														
11	5	7	8														
10	5	7	8														
9	4	6	8	9													
8	4	5	6	9													
7	3	5	6	8													
6	3	4	6	7													
5	2	3	4	6	6												
4	2	3	4	4	6	7	8	9	9								
3	1	2	2	4	4	6	6	6	8	8	8	10	10	$\cdots$	36	38	38
2	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	$\cdots$	32	33	→
1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	$\cdots$	24	24	→

$$
\begin{aligned}
\hat{H}(n,1) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\
\hat{H}(n,2) &= \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor, \\
\hat{H}(n,3) &= 2\left\lfloor \frac{3(n+2)}{8} \right\rfloor, \qquad (1 \leqslant n \leqslant 50).
\end{aligned}
$$

这儿的“ $\lfloor\ \rfloor$ ”表示去尾取整，后面用到的“ $\lceil\ \rceil$ ”表示收尾取整.

另外，有些文献还对一般的 $\hat{H}(n,m)$ 的上下界做了一些讨论，如 Gasull A.

和 Torregrosa J. 的文章等.

6.2 对 $\hat{H}(n,m)$ 的估计

我们考虑系统 (6.2).

$\hat{H}(n,1)$(n 为任意正整数) 是比较容易确定的，即有下面的定理及推论

定理 6.2.1 系统

$$\dot{x} = y - (a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_ix^i + \cdots), \qquad \dot{y} = -x$$

的第 k 阶焦点量为 $L(k) = l_k a_{2k+1}, l_k$ 是非零常数.

这可以从焦点量的计算方法直接分析得到. 依据该定理，显然有

推论 6.2.2 $\hat{H}(n,1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

这是因为对系统 (注意， f 的次数为 n 时， F 的次数为 $n+1$.)

$$\dot{x} = y - (a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n+1}x^{n+1}), \quad \dot{y} = -x,$$

有 $L(1) = l_1a_3, L(2) = l_2a_5, \cdots, L(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor - 1) = l_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}a_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}, L(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor) = l_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}a_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}$, 更高阶的焦点量均为零. 而 $a_3, a_5, \cdots, a_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}$ 都是独立的，令 $a_3 = 0, a_5 = 0, \cdots, a_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} = 0, a_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1} \neq 0$, 即有 $L(1) = 0, L(2) = 0, \cdots, L(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor - 1) = 0, L(2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor) \neq 0$, 所以 $\hat{H}(n,1) \geqslant \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. 如果再令 $L(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1) = 0$, 因为更高阶的焦点量均为零，此时就变成中心的情况了.

Christopher C. 和 Lynch S. 通过做一些变换，得到了 $\hat{H}(n,2)$. 我们在这里借鉴他们作的主要变换，从更一般性的角度考虑 $\hat{H}(n,m)$.

设系统 (6.2) 中

$$F(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n+1}x^{n+1},$$
$$g(x) = x + b_2'x^2 + \cdots + b_m'x^m.$$

再定义如下的变化

$$u^2 = 2G(x), \qquad u(0) = 0, \qquad u'(0) > 0,$$

其中

$$G(x) = \int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

为方便书写，不妨记

$$u^2 = 2G(x) = x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots + b_{m+1}x^{m+1}.$$

显然 $b_3, b_4, \cdots, b_{m+1}$ 分别只与 $b'_2, b'_3, \cdots, b'_m$ 相差一个常数倍数.

作了这个变换后, (6.2) 同胚于

$$\dot{u} = Y - F^*(u), \quad \dot{Y} = -u, \tag{6.3}$$

其中

$$F^*(u) = F(x(u)),$$

($x(u)$ 是 $u = \sqrt{2G(x)}\,\mathrm{sgn}(x)$ 的逆). 这就将系统 (6.2) 变成了 (6.1) 型的系统.

在 $u = 0$ 点附近, 将 $F^*(u)$ 展成级数

$$F^*(u) = d_2u^2 + d_3u^3 + d_4(u^2)^2 + \cdots + d_{2i-1}u^{2i-1} + d_{2i}(u^2)^i + \cdots.$$

从定理 6.2.1 及推论知道, 如果我们能确定 $d_{2j+1}(j = 1, 2, \cdots)$, 也就能确定系统 (6.3). 这样的话, (6.2) 的焦点量, 小扰动极限环的个数甚至最大个数 $\hat{H}(n, m)$ 也就随之确定.

下面就来确定 d_{2j+1}.

采用递归法. 设求出了前 $k-1$ 个, 即 $d_3, d_5, \cdots, d_{2k-1}$, 现在求第 k 个, 即 $d_{2k+1}(k = 1, 2, \cdots)$.

设 $d_3 = d_5 = \cdots = d_{2k-1} = 0$, 则 $F^*(u)$ 可记为

$$F^*(u) = d_2u^2 + d_4(u^2)^2 + \cdots + d_{2k}(u^2)^k + d_{2k+1}u^{2k+1} + \cdots,$$

把

$$u^2 = 2G(x) = x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots + b_{m+1}x^{m+1}$$

代入 $F^*(u)$ 的前 k 项, 并结合 $u = x + O(x)$ 得

$$\begin{aligned}F^*(u) = {} & d_2(x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots + b_{m+1}x^{m+1}) + \\ & d_4(x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots + b_{m+1}x^{m+1})^2 + \\ & d_6(x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots + b_{m+1}x^{m+1})^3 + \\ & \qquad \cdots\cdots \quad + \\ & d_{2k}(x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots + b_{m+1}x^{m+1})^k + \\ & d_{2k+1}x^{2k+1} + O(x^{2k+2}), \qquad k = 1, 2, \cdots\end{aligned} \tag{6.4}$$

如果把它展开并按 x 合并同类项, 则它与

$$F(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n+1}x^{n+1}$$

的对应项系数应该相等，即有下列等式，

$$\begin{aligned}
a_2 &= d_2,\\
a_3 &= d_3 + b_3 d_2,\\
a_4 &= d_4 + b_4 d_2,\\
&\ \vdots\\
a_n &= d_n + \cdots + b_n d_2,\\
0 &= d_{n+1} + \cdots + b_{n+1} d_2,\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

当 $i > n+1, j > m+1$ 时，我们令 $a_i = 0, b_j = 0$.

利用 (6.4), 容易计算出 d_{2k+1}, 也即系统 (6.3) 或 (6.2) 的第 k 阶焦点量．例如：

第一步，求 d_3, 即 $k=1$.

由 F^* 与 F 中 x 的二次项相等，有等式

$$a_2 = d_2,$$

解出 d_2:

$$d_2 = a_2. \tag{d_2^*}$$

再由 x 的三次项 (即 $2\times 1+1$) 相等有

$$a_3 = d_3 + d_2 b_3,$$

解出 d_3 :

$$d_3 = a_3 - d_2 b_3.$$

把 (d_2^*) 代入即得

$$d_3 = a_3 - a_2 b_3.$$

第二步，求 d_5, 即 $k=2$.(此时，已假设了 $d_3 = 0$)

由 F^* 与 F 中 x 的四次项相等，有等式

$$a_4 = d_4 + b_4 d_2,$$

解出 d_4:

$$d_4 = a_4 - b_4 d_2. \tag{d_4^*}$$

再由 x 的五次项 (即 $2\times 2+1$) 有

$$a_5 = d_5 + 2b_3 d_4 + b_5 d_2,$$

解出 d_5:

$$d_5 = a_5 - 2b_3d_4 - b_5d_2.$$

把 $(d_2^*),(d_4^*)$ 代入上式得

$$d_5 = a_5 - 2b_3(a_4 - b_4a_2) - b_5a_2.$$

第三步，求 d_7, 即 $k=3$.(此时，已假设了 $d_3 = d_5 = 0$)

由 F^* 与 F 中 x 的六次项相等有等式

$$a_6 = d_6 + (b_3^2 + 2b_4)d_4 + b_6d_2,$$

解出 d_6:

$$d_6 = a_6 - (b_3^2 + 2b_4)d_4 - b_6d_2. \qquad (d_6^*)$$

再由 x 的七次项 (即 $2\times 3+1$) 有

$$a_7 = d_7 + 3b_3d_6 + 2(b_3b_4 + b_5)d_4 + b_7d_2,$$

解出 d_7:

$$d_7 = a_7 - 3b_3d_6 - 2(b_3b_4 + b_5)d_4 - b_7d_2.$$

把 $(d_2^*),(d_4^*),(d_6^*)$ 代入上式得

$$d_7 = a_7 - 3b_3(a_6 - (b_3^2 + 2b_4)(a_4 - b_4a_2) - b_6a_2) - 2(b_3b_4 + b_5)(a_4 - b_4a_2) - b_7a_2.$$

相同的方法，可以计算后续的 $d_9, d_{11}, \cdots$. 在上面的计算过程中，当 $i > n+1, j > m+1$ 时，我们令 $a_i = 0, b_j = 0$. 此过程的具体算法如下：

INPUT　　F(x), u^2

OUTPUT　　$d_3, d_5, \cdots, d_{2k+1}$

BEGIN

　　$i = 1, \mathrm{setd} = \varnothing, F^* = 0$

　　WHILE $i \leqslant k$ DO

　　　　$F^* = F^* + d_{2i}(u^2)^i$

　　　　$\mathrm{setd} = \mathrm{setdunionsolve}(\mathrm{coefficient}(F^* - F, x^{2i}), d_{2i})$ // 注 1

　　　　$d_{2i+1} = \mathrm{subs}(\mathrm{setd}, -\mathrm{coefficient}(F^* - F, x^{2i+1}))$ // 注 2

　　END WHILE

　　RETURN $d_3, d_5, \cdots, d_{2k+1}$

END

注 1　利用 F^* 与 F 的对应项系数相等，解出 d_{2i}.

注 2 从 (6.4) 可以看出，对 F^*,x^{2i+1} 的系数中 d_{2i+1} 独立成一项，因此可以用这种方式把它得出来， subs 用前面解出来的式子 (包含在 setd 里面) 替换表达式中的 $d_2, d_4, \cdots, d_{2i}$.

在第 5 章，我们介绍了一般的焦点量算法，对 Liénard 系统同样适用．不过，此处的算法是专门针对 Liénard 系统，效率上要高得多.

一般说来，把焦点量计算出来后， $\hat{H}(.,.)$ 是不难得出的．首先，给出几个一般性的结论．在 6.3 节，我们将通过具体实例说明这点.

现在计算 $\hat{H}(1,n)$.

当 $F(x) = a_2x^2 (a_2 \neq 0), g(x) = x + b_2'x^2 + \cdots + b_n'x^n$ 时，把 (6.4) 展开，并结合 F^* 与 F 的关系可以得到

$$\begin{aligned} a_2 &= d_2, \\ 0 &= d_3 + b_3d_2, \\ 0 &= d_4 + b_4d_2, \\ 0 &= d_5 + 2b_3d_4 + b_5d_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

可见， $d_3 = l_3b_3$. 当 $d_3 = 0$ 时， $d_5 = l_5b_5$. 具体分析 (6.4) 的结构，一般地，当 $d_3 = d_5 = \cdots = d_{2k-1} = 0$ 时,

$$d_{2k+1} = l_{2k+1}b_{2k+1},$$

其中 l_{2k+1} 是 a_2 的单项式．根据定理 6.1 及推论 6.1 即有

定理 6.2.3 $\hat{H}(1,n) = \hat{H}(n,1)$.

再计算 $\hat{H}(n,2)$.

我们首先对 $F(x)$ 的系数做一个变换：

$$a_i = a_i'b_3^{i-2} (3 \leqslant i \leqslant n+1).$$

现在从 (6.4) 分析各 d_j 的结构, 可知 $d_2 = a_2$， $d_j = b_3^{j-2}h_j(a_2, a_3', \cdots, a_{n+1}') (j \geqslant 3)$, h_j 是 $a_2, a_3', \cdots, a_{n+1}'$ 的线性组合．因此，我们令 $b_3 = 1$, 对焦点量的讨论没有影响.

现在令 $b_3=1$, 则 (6.4) 可写为

$$F^*(u)=d_2(x^2+x^3)+ \\ d_4(x^2+x^3)^2+ \\ d_6(x^2+x^3)^3+ \\ \cdots+ \\ d_{2k}(x^2+x^3)^k+ \\ d_{2k+1}x^{2k+1}+O(x^{2k+2}), \qquad k=1,2,\cdots \tag{6.5}$$

把上式展开，按 x 的次数排序，并结合 F 有

$$a_{2k}=d_{2k}+C_{k-1}^2 d_{2k-2}+C_{k-2}^4 d_{2k-4}+\cdots+C_{\lceil\frac{2k}{3}\rceil}^{2k-2\lceil\frac{2k}{3}\rceil}d_{2\lceil\frac{2k}{3}\rceil}, \tag{6.6}$$

$$a_{2k+1}=d_{2k+1}+C_k^1 d_{2k}+C_{k-1}^3 d_{2k-2}+\cdots+C_{\lceil\frac{2k+1}{3}\rceil}^{2k+1-2\lceil\frac{2k+1}{3}\rceil}d_{2\lceil\frac{2k+1}{3}\rceil}. \tag{6.7}$$

当 $j>n+1$ 时， $a_j=0$. 逐步考虑 $k=1,k=2,k=3,\cdots$, 我们就可以求出 $d_2,d_3,d_4,\cdots$.

当 $2k\leqslant n+1$ 时，从 (6.6) 的结构可知，不管 $d_{2i}(2\lceil\dfrac{2k}{3}\rceil\leqslant 2i\leqslant 2k)$ 取什么值，都可以调节 a_{2k} 使等式成立，并且可以为它们建立一一对应关系，即 $(a_2,d_2),(a_4,d_4),\cdots,(a_{2k},d_{2k})$.

当 $2k+1\leqslant n+1$ 时, 从 (6.7) 的结构知道, 对任意的 $d_{2i}(2\lceil\dfrac{2k+1}{3}\rceil\leqslant 2i\leqslant 2k)$, 调节 a_{2k+1}, 可以使得 $d_{2k+1}=0$.

因此，我们不妨把 $d_{2j}(2j\leqslant n+1)$ 看成自由变量，而把 $a_j(j\leqslant n+1)$ 看成因变量.

下面考虑 $2k>n+1$ 时的情形. 又分两种情况：

情形 1 $n+1$ 为奇数.

此时， (6.6) 和 (6.7) 的左端为零，重新整理可得

$$d_{2k}=-C_{k-1}^2 d_{2k-2}-C_{k-2}^4 d_{2k-4}-\cdots-C_{\lceil\frac{2k}{3}\rceil}^{2k-2\lceil\frac{2k}{3}\rceil}d_{2\lceil\frac{2k}{3}\rceil}, \tag{6.6$'$}$$

$$d_{2k+1}=-C_k^1 d_{2k}-C_{k-1}^3 d_{2k-2}-\cdots-C_{\lceil\frac{2k+1}{3}\rceil}^{2k+1-2\lceil\frac{2k+1}{3}\rceil}d_{2\lceil\frac{2k+1}{3}\rceil}. \tag{6.7$'$}$$

(6.6$'$) 的 d_{2k},(6.7$'$) 的 d_{2k+1} 都是由等式右边的变量惟一决定的. 因此由 (6.6$'$) 推出的等式

$$d_{n+2}=-C_{\frac{n+2}{2}-1}^2 d_{n+2-2}-C_{\frac{n+2}{2}-2}^4 d_{n+2-4}-\cdots-C_{\lceil\frac{n+2}{3}\rceil}^{n+2-2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil}d_{2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil} \tag{6.8}$$

右边的变量 $d_{n+2-2},d_{n+2-4},\cdots,d_{2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil}$(这些都是自由变量, 且后面由 x 的更高次导出的等式中只可能包含这些自由变量) 决定着后面等式的成立与否. 根据

由 F, F^* 导出的等式的特性：一个变量会出现在若干相邻等式中，而一个等式又包含相邻的若干变量. 变量 $d_{n+2-2}, d_{n+2-4}, \cdots, d_{2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil+2}$ 必定会出现在接着的几个由 x 的更高次导出的等式中. 对变量 $d_{2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil}$ 就不一定. 为此，我们做变换，把 $d_{2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil+2}$ 换成 d_{n+2}, 这显然不影响 (6.8) 式的成立. 而 d_{n+2} 与 d_{n+2-2}, $d_{n+2-4}, \cdots, d_{2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil+2}$ 一样，肯定会出现在接着的几个由 x 的更高次导出的等式中.

因为我们要求的是 $\hat{H}(n,2)$, 所以只需要求出满足下列两个条件的 N,

i) $d_{2j+1}=0(n+1<2j+1<2N+1)$,

ii) $d_{2N+1}\neq 0$, 否则就有 $d_{2j+1}=0(2j+1>2N+1)$.

根据变量与线性方程组之间的关系，当变量 $\{d_{n+2}, d_{n+2-2}, \cdots, d_{2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil+2}\}$ 的个数恰好比 (6.7′) 型的独立等式的个数多 1 时，就满足如上 i) 和 ii). 所以有

$$\frac{(2N+1)-(n+3)}{2}+1=\frac{(n+2)-2\lceil\dfrac{n+2}{3}\rceil-2}{2}+1.$$

即

$$N=n+1-\left\lceil\frac{n+2}{3}\right\rceil=\left\lfloor\frac{2n+1}{3}\right\rfloor.$$

所以，当 $n+1$ 为奇数时，

$$\hat{H}(n,2)=\lfloor\frac{2n+1}{3}\rfloor.$$

情形 2 $n+1$ 为偶数.

除了把情形 1 中的等式 (6.8) 换成

$$d_{n+2}=-C^2_{\frac{n+1}{2}}d_{n+1}-C^4_{\frac{n+1}{2}-1}d_{n+1-2}-\cdots-C^{n+2-2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil}_{\lceil\frac{n+2}{3}\rceil}d_{2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil}\tag{6.9}$$

外，与情形 1 相同的方法，可得到

$$\frac{(2N+1)-(n+2)}{2}+1=\frac{(n+3)-2\lceil\dfrac{n+2}{3}\rceil-2}{2}+1.$$

化简有

$$N=n+1-\left\lceil\frac{n+2}{3}\right\rceil=\left\lfloor\frac{2n+1}{3}\right\rfloor.$$

所以，当 $n+1$ 为偶数时，也有

$$\hat{H}(n,2)=\left\lfloor\frac{2n+1}{3}\right\rfloor.$$

综上所述，有

定理 6.2.4 $\hat{H}(n,2)=\lfloor\frac{2n+1}{3}\rfloor$.

最后考虑 $\hat{H}(n,3)$

类似于 $\hat{H}(n,2)$ 的办法，作如下变换

$$b_4=b_3^2b_4',\qquad a_i=a_i'b_3^{i-2}(3\leqslant i\leqslant n+1).$$

现在分析各 d_j 的结构，可知 $d_2=a_2,d_j=b_3^{j-2}h_j(b_4',a_2,a_3',\cdots,a_{n+1}')(3\leqslant j)$. 因此，我们令 $b_3=1$, 对焦点量的讨论没有影响 (实际上，当 $m\geqslant 2$ 时，都可以令 $b_3=1$).

令 $b_3=1$, 则 (6.4) 可写为

$$\begin{aligned}F^*(u)=d_2(&x^2+x^3+b_4x^4)+\\&d_4(x^2+x^3+b_4x^4)^2+\\&d_6(x^2+x^3+b_4x^4)^3+\\&\cdots+\\&d_{2k}(x^2+x^3+b_4x^4)^k+\\&d_{2k+1}x^{2k+1}+O(x^{2k+2}),k=1,2,\cdots\end{aligned}$$

如果再令 $b_4=1$, 类似于 $\hat{H}(n,2)$ 的计算，我们得到此时小扰动极限环的最大个数 N' 满足：

1) $n+1$ 是奇数时,

$$\frac{(2N'+1)-(n+3)}{2}+1=\frac{(n+2-2)-2\lceil\frac{n+2}{4}\rceil}{2}+1.$$

即

$$N'=n+1-\lceil\frac{n+2}{4}\rceil.$$

2) $n+1$ 是偶数时,

$$\frac{(2N'+1)-(n+2)}{2}+1=\frac{(n+1)-2\lceil\frac{n+2}{4}\rceil}{2}+1.$$

化简有

$$N'=n+1-\lceil\frac{n+2}{4}\rceil.$$

综合 1) 和 2), 有

$$N'=n+1-\lceil\frac{n+2}{4}\rceil.$$

显然有 $N'\leqslant\hat{H}(n,3)$.

再考虑变量 b_4, 自然有

定理 6.2.5 $n+1-\lceil\frac{n+2}{4}\rceil \leqslant \hat{H}(n,3) \leqslant n+2-\lceil\frac{n+2}{4}\rceil.$

更一般的，我们可以得到

定理 6.2.6 当 $m \geqslant 2$ 时，

$n+1-\lceil\frac{n+2}{m+1}\rceil \leqslant \hat{H}(n,m) \leqslant n+1-\lceil\frac{n+2}{m+1}\rceil+m-2 = n+m-1-\lceil\frac{n+2}{m+1}\rceil.$

6.3 小扰动极限环的构造

上一节中，我们通过将 $\hat{H}(n,m)$ 的估计问题化为对 $\hat{H}(n,1)$ 的估计问题，完整的给出了 $\hat{H}(n,2)$ 的结果，并给出了 $\hat{H}(n,3)$ 及更一般的 $\hat{H}(n,m)$ 的估计. 本节我们利用 6.2 节中推导出的计算 Liénard 系统的焦点量的算法，给出两个具体的求 $\hat{H}(.,.)$ 的例子. 一个是 $\hat{H}(6,5)=8$, 另一个是 $\hat{H}(7,5)=9$.

首先考虑 $\hat{H}(6,5)$

此时系统可写为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 - a_5x^5 - a_6x^6 - a_7x^7,\\ \dot{y} &= -x - b_2'x^2 - b_3'x^3 - b_4'x^4 - b_5'x^5.\end{aligned} \tag{6.10}$$

根据 6.2 节的做法，令

$$u^2 = x^2 + x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6.$$

以 $a_3 \prec a_5 \prec a_7 \prec a_6$ 为序计算 (6.10) 的前八个焦点量:

$L(1) = a_3 - a_2,$

$L(2) = a_5 - a_2b_5 - 2a_4 + 2a_2b_4,$

$L(3) = a_7 - 2b_5a_4 + 4b_4a_4 + 2b_5a_2b_4 - 4a_2b_4^2 - 3a_6 + 3a_2b_6 + 3a_4 - 3a_2b_4,$

$L(4) = I_1a_6 - A_6,$

$L(5) = -(-a_4 + a_2b_4)L'(5)/I_1,$

$L(6) = (-a_4 + a_2b_4)L'(6)/I_1,$

$L(7) = (-a_4 + a_2b_4)L'(7)/I_1,$

$L(8) = (-a_4 + a_2b_4)L'(8)/I_1,$

其中

$$\begin{aligned}I_1 &= 11 - 3b_5 + 6b_4,\\ A_6 &= 12b_6a_2b_4 + 11a_2b_6 - 11a_2b_4 - 6b_6a_4 -\\ &\quad 11b_5a_4 + 8b_4^2a_4 - 8b_4^3a_2 + 28b_4a_4 - 28a_2b_4^2 +\\ &\quad 11b_5a_2b_4 + 4b_4^2b_5a_2 - 4b_4b_5a_4 - 3b_5a_2b_6,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L'(5) = & -18b_5^2b_6 + 26b_4^2 - 54b_6^2 - 104b_6 + 52b_5 - \\
& 84b_5b_6 - 208b_5b_4^2 + 36b_4b_5b_6 - 13b_5^2 + 156b_4b_5^2 + \\
& 104b_4^3 + 144b_4b_6 - 39b_5^3 + 52b_4b_5, \\
L'(6) = & -108b_4b_6^2 + 672b_5^2b_4^2 + 288b_4^2b_6 - 198b_5^3b_4 - \\
& 270b_5^2b_6 - 756b_5b_6 - 1176b_6 + 588b_5 + 294b_4^2 - 810b_6^2 - 266b_5^2 + \\
& 1196b_4b_6 + 1534b_4b_5^2 - 2128b_5b_4^2 + 948b_4b_5 - 36b_5^2b_6b_4 + \\
& 372b_4b_5b_6 + 448b_4^4 + 1356b_4^3 - 385b_5^3 - 896b_4^3b_5 + 72b_5b_6b_4^2 + 15b_5^4,
\end{aligned}
$$

$L'(7), L'(8)$ 分别是关于 b_4, b_5, b_6 的 37, 52 项的多项式.

在这里，我们不妨假定 $I_1 \neq 0$. 因为当 $I_1 = 0$ 时， $L(5), L(6), L(7), L(8)$ 变得非常简单，这样得到的小扰动极限环的个数要少于 $I_1 \neq 0$ 时得到的个数.

当下列几个等式成立时

$$
\begin{aligned}
& a_3 = a_2, \\
& a_5 = a_2b_5 + 2a_4 - 2a_2b_4, \\
& a_7 = 2b_5a_4 - 4b_4a_4 - 2b_5a_2b_4 + 4a_2b_4^2 + 3a_6 - 3a_2b_6 - 3a_4 + 3a_2b_4, \\
& a_6 = A_6/I_1,
\end{aligned}
$$

有 $L(0) = L(1) = L(2) = L(3) = L(4) = 0$. 现在只需要证明关于 b_4, b_5, b_6 的方程组 $\{L'(5), L'(6), L'(7)\}$ 有解，使得 $I_1 \neq 0, L'(8) \neq 0$.

对 $\{L'(5), L'(6), L'(7)\}$ 进行三角化处理后，得到等价的

$$
\begin{aligned}
& L''(5) = L'(5), \\
& L''(6) = (3b_5 - 11 - 6b_4)(b_5 - 2b_4)P(b_4, b_5), \\
& L''(7) = Q_1(b_4)Q_2(b_4).
\end{aligned}
$$

以及两个初式 $q_6 = -108b_4 - 810$ 和 $q_{75} = -218484 + 117504b_4$, 其中 $P(b_4, b_5)$ 是一个 26 项的多项式，而

$$
\begin{aligned}
Q_1 = & 62635933334208b_4^5 + 686669406726624b_4^4 + 2949708560226126b_4^3 + \\
& 399368077850277b_4^2 - 140795960915106b_4 - 21987735633815,
\end{aligned}
$$

$Q_2(b_4)$ 是一个 19 项的多项式.

调用 mrealroot 函数：

$$
\text{mrealroot}\left([Q_1, P, L'(5)], [b_4, b_5, b_6], \frac{1}{10^{30}}, [I_1, q_6, q_{75}, L'(8)]\right)
$$

得到

$$
\left[\left[-\frac{1511959542771020720773087854449}{1267650600228229401496703205376}, -\frac{1889949428463775900966359818 1}{1584563250285286751870879006 72}\right],\right.
$$

$$
\left[-\frac{558304276156030262114796553918 5}{316912650057057350374175801344}, -\frac{2233217104624121048459186215671 1}{1267650600228229401496703205376}\right],
$$

$$\Big[-\frac{70210855519482579641887795939105}{63382530011411470074835160268\,8},-\frac{140421711038965159283775591877755}{126765060022822940149670320537\,6}\Big],$$

$$+,-,-,+\Big].$$

实际上有好几组解，我们只列出了这一组．由此得证

定理 6.3.1 $\hat{H}(6,5)=8$.

再考虑 $\hat{H}(7,5)$. 此时系统为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y-a_2x^2-a_3x^3-a_4x^4-a_5x^5-a_6x^6-a_7x^7-a_8x^8,\\ \dot{y}&=-x-b_2'x^2-b_3'x^3-b_4'x^4-b_5'x^5.\end{aligned}\tag{6.11}$$

同样令 $u^2=x^2+x^3+b_4x^4+b_5x^5+b_6x^6$.

以 $a_3\prec a_5\prec a_7\prec a_8\prec a_6$ 为序计算 (6.11) 的前九个焦点量：

$$\begin{aligned}
&L(1)=a_3-a_2,\\
&L(2)=a_5-a_2b_5-2a_4+2a_2b_4,\\
&L(3)=a_7-2b_5a_4+4b_4a_4+2b_5a_2b_4-4a_2b_4^2-3a_6+3a_2b_6+3a_4-3a_2b_4,\\
&L(4)=-4a_8+A_8,\\
&L(5)=a_6I_1+A_6,\\
&L(6)=(-a_4+a_2b_4)L'(6)/I_1,\\
&L(7)=(-a_4+a_2b_4)L'(7)/I_1,\\
&L(8)=(-a_4+a_2b_4)L'(8)/I_1,\\
&L(9)=(-a_4+a_2b_4)L'(9)/I_1,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1=&\ 13+52b_4-17b_5+12b_4b_5-18b_6-6b_5^2,\\
A_8=&-11a_4+11a_6+11a_2b_4-11b_5a_2b_4+11b_5a_4-8b_4^2a_4+\\
&8b_4^3a_2-28b_4a_4+28a_2b_4^2-4b_4^2b_5a_2+4b_4b_5a_4-3b_5a_6+\\
&6b_4a_6-11a_2b_6+3b_5a_2b_6-12b_6a_2b_4+6b_6a_4,\\
A_6=&-13a_4+13a_2b_4+4b_5^2a_2b_4-17b_5a_2b_4-4b_5^2a_4+17b_5a_4-\\
&104b_4^2a_4+104b_4^3a_2-78b_4a_4+78a_2b_4^2-16b_4^2b_5a_4+\\
&16b_4^3b_5a_2-48b_4^2b_5a_2+48b_4b_5a_4+8b_5^2b_4a_4-8b_5^2a_2b_4^2-\\
&13a_2b_6+17b_5a_2b_6+6b_5^2a_2b_6+18a_2b_6^2-12b_5b_6a_2b_4-\\
&24b_4^2b_6a_2+24b_4b_6a_4-96b_6a_2b_4+44b_6a_4,
\end{aligned}$$

$L'(6),L'(7),L'(8),L'(9)$ 分别是关于 b_4,b_5,b_6 的 25,39,57,79 项的多项式.

同考虑 $\hat{H}(6,5)$ 一样，我们也假定 $I_1\neq 0$. 当 a_3,a_5,a_7,a_8,a_6 满足

$$a_3 = a_2,$$
$$a_5 = a_2 b_5 + 2a_4 - 2a_2 b_4,$$
$$a_7 = 2b_5 a_4 - 4b_4 a_4 - 2b_5 a_2 b_4 + 4a_2 b_4^2 + 3a_6 - 3a_2 b_6 - 3a_4 + 3a_2 b_4,$$
$$a_8 = A8/4,$$
$$a_6 = -A6/I_1$$

时，有 $L(0) = L(1) = L(2) = L(3) = L(4) = L(5) = 0$. 现在只需要证明关于 b_4, b_5, b_6 的方程组 $\{L'(6), L'(7), L'(8)\}$ 有解，使得 $I_1 \neq 0, L'(9) \neq 0$ 即可.

对 $\{L'(6), L'(7), L'(8)\}$ 进行三角化处理后，得到等价的

$$L''(5) = L'(5),$$
$$L''(6) = b_5(b_5 - 2b_4)P(b_4, b_5),$$
$$L''(7) = Q_1(b_4)Q_2(b_4)$$

和两个初式 $q_8 = -31752 - 22464b_4 + 11016b_5$, $q_{86} = 8893650150 + 1551312000b_4$, 其中 $P(b_4, b_5)$ 是一个 49 项的多项式，而

$$\begin{aligned} Q_1 = {} & 1886083116976806_4^8 + 29357214570361446_4^7 + \\ & 17786919603689712b_4^6 + 51647265180914832b_4^5 + 76340486615773680b_4^4 + \\ & 60360491708838420b_4^3 + 25820425679973435b_4^2 + \\ & 5819187946715675b_4 + 553878796225440, \end{aligned}$$

$Q_2(b_4)$ 是一个 47 项的多项式.

调用 mrealroot 函数：

$$\mathrm{mrealroot}\left([Q_1, P, L'(6)], [b_4, b_5, b_6], \frac{1}{10^{30}}, [I_1, q_8, q_{86}, L'(9)]\right)$$

得到

$$\Big[\Big[-\frac{426069781133589408493986684937}{1267650600228229401496703205376}, -\frac{532587226416986760617483335617}{1584563250285286751870879006672}\Big],$$
$$\Big[\frac{104575938508141737066184295469}{633825300114114700748351602688}, \frac{209151877016283474132368590947}{1267650600228229401496703205376}\Big],$$
$$\Big[-\frac{196173063332521446691089492603}{1267650600228229401496703205376}, -\frac{490432658331303616727723731147}{3169126500570573503741758013440}\Big],$$
$$-, -, +, -, \Big].$$

由此得证

定理 6.3.2 $\hat{H}(7, 5) = 9$.

注　释

6.1 节关于 Liénard 系统极限环问题的引入和基本结果可参考 [40, 41, 65], 相关的结果亦可在 [16, 23, 24] 中找到. 在考虑 Liénard 系统小扰动极限环问题方面所取得的进展请参阅 [13, 54, 26]. 6.2 节计算 $\hat{H}(n,m)$ 的算法主要是对 [13] 的推广.

第七章　平面微分多项式系统的中心

前面几章中，我们讨论了平面系统的中心焦点问题，在平面系统具有弱焦点时，利用 mrealroot 算法给出小扰动极限环的统一构造.

当系统存在中心时，可以进一步考虑其等时性. 具体的讲，当系统存在 (非退化) 中心时，考虑每个周期解的周期. 当所有的周期都相同时，此中心称为等时中心. 当中心为非等时时，可以根据周期常数定义其阶数，研究其定性性质及相关问题.

本章首先给出弱中心及等时中心的定义及基本性质，讨论一些构造等时中心的常规论证. 我们主要是在非等时中心时给出弱中心最大阶数的一般性论证. 这包括周期常数的计算，周期函数系统 (多项式) 的三角化及 mrealroot 算法求解. 与小扰动极限环类似，利用 mrealroot 算法求出使前 k 个周期常数为零，而前 k 个周期常数的独立性可以保证系统的中心正好为 k 阶弱中心.

本章将给出相关文献中关于弱中心构造问题的一个统一处理.

7.1　中心的基本概念和性质

本节我们考虑平面微分多项式系统的非退化中心，介绍一些基本概念和定理，给出二次系统的一些相关结果.

对于平面微分向量场，我们作如下假设：

向量场 $(x,y)\mapsto X(x,y,\lambda)$, $x,y\in R$ 对于任意的参数 $\lambda\in R^n$ 在原点是中心， $(x,y,\lambda)\mapsto X(x,y,\lambda)$ 是解析的，并且线性部分具有形式 $(x,y)\mapsto(-y,x)$. 此时中心称之为线性中心.

选择 x 轴上包含原点的一足够小的开区间，使得过该区间中任一非零点的轨道是周期的，且包含原点在其内部. 对该区间中的一点 ξ, 记 $P(\xi,\lambda)$ 为过点 $(\xi,0)$ 的轨道的最小正周期. 由下面的周期系数引理，在上述假设下，周期函数 $\xi\mapsto P(\xi,\lambda)$ 是解析的.

引理 7.1.1 (周期系数引理) 如果向量场满足上述假设，则对于周期函数的如下命题成立：

i) 定义 $P(0,\lambda)=2\pi,\lambda\in R^n$. 如果 $\lambda_*\in R^n$, 则存在一个 λ_* 的开邻域 W 和包含 $\xi=0$ 的开区间，使得在 $\Omega:=J\times W$ 上周期函数 $\xi\to P(\xi,\lambda)$ 是解析的.

ii) 任意给定 $\lambda_*\in R^n$, 对于足够小的 ξ 和 $|\lambda-\lambda_*|$, 周期函数 P 可以展成

Taylor 级数

$$P(\xi,\lambda)=2\pi+\sum_{k=2}^{\infty}p_k(\lambda)\xi^k,$$

并且, $p_1\equiv 0$, 对于 $k\geqslant 2$, $p_k\in R\{\lambda_1,\cdots,\lambda_N\}_{\lambda_*}$.

iii) 对于 $k\geqslant 1$ 和 $\lambda_*\in R^N$, Taylor 系数 p_{2k+1} 属于环 $R\{\lambda_1,\cdots,\lambda_N\}_{\lambda_*}$ 上的理想 $<p_2,p_4,\cdots,p_{2k}>$.

该引理为我们刻画了周期函数系数的良好性质, iii) 表明: 对于任意的 $\lambda\in R^N$, 第一个使得 $p_k(\lambda)\neq 0$ 的 $k(\geqslant 1)$ 是偶数. 这使得下面关于弱中心阶数的定义是合理的, 即

定义 7.1.2 对应于某个参数值 λ_* 的线性中心称为是阶数为 k 的弱中心, 如果 $\rho(\xi,\lambda_*)=P(\xi,\lambda_*)-P(0,\lambda_*)$ 满足

$$\rho(0,\lambda_*)=\rho^{'}(0,\lambda_*)=\cdots=\rho^{(2k+1)}(0,\lambda_*)=0,\quad \rho^{(2k+2)}(0,\lambda_*)\neq 0,$$

这里的微分都是关于 ρ 的第一个参数 ξ 的. 当弱中心的阶数为无穷时, 即为等时中心, 此时, 所有围绕中心的周期解都具有相同的周期.

记 $F(\xi,\lambda)=P_\xi(\xi,\lambda)$, 则在 $\xi=0$ 处, 有展开式

$$F(\xi,\lambda)=a_0(\lambda)+a_1(\lambda)\xi+a_2(\lambda)\xi^2+\cdots,$$

这里的 $a_i(\lambda)$ 都是解析的. 对于给定的点 λ_*, 使得 $F(0,\lambda_*)=0$, 在 λ_* 周围扰动参数 λ, 我们想知道在 $\xi=0$ 附近函数 $F(\xi,\lambda)=0$ 的零点个数.

定义 7.1.3 当

$$a_0(\lambda_*)=a_1(\lambda_*)=\cdots=a_n(\lambda_*)=0,\quad a_{n+1}(\lambda_*)\neq 0,$$

我们称分支点 λ_* 有阶数 n, 此时至多有 n 个零点可由 $(0,\lambda_*)$ 分支.
当对于所有的 $k\geqslant 0$, 都有 $a_k(\lambda_*)=0$ 时, 我们需要考虑在环 $R\{\lambda_1,\cdots,\lambda_N\}$ 上的理想 $\langle a_0,a_1,a_2,\cdots\rangle$. 由 Hilbert 基定理, 我们知道存在最小的 K, 使得理想 $\langle a_0,a_1,a_2,\cdots\rangle=\langle a_0,a_1,\cdots,a_K\rangle$. 此时, 至多有 K 个零点可由 $(0,\lambda_*)$ 分支出.

一般地, 考虑 K 基本上是不可能的. 对于特定的系统, 通过坐标变换的技巧和相关定理, 可以得到局部的结论. 例如, Bautin 给出了关于二次系统等时中心和弱中心分支的完整的结果, Christopher 给出了三次 Kukles 系统等时中心的结论, Chavarriga 给出了具有退化无穷三次系统的等时中心的充要条件. 我们将在后面的论述中介绍这些结论.

定义 7.1.4 我们称一个周期为局部临界周期, 如果它由弱中心在周期函数的临界点处分支而得. 确切地说, 我们称关于 $\lambda_*\in R^N$ 弱中心可以分支出 k

个局部临界周期，如果对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 λ_* 的邻域 W，存在一点 $\lambda^1 \in W$，使得 $F(\xi, \lambda^1) = 0$ 在 $U := (0, \varepsilon)$ 上有 k 个解.

下面的引理指出了弱中心的阶数和临界周期分支之间的关系.

引理 7.1.5（有限阶数分支引理）如果向量场满足前述假设，原点相应于参数 λ_* 是阶数为 k 的弱中心，则在 λ_* 至多可以由中心分支出 k 个局部临界周期.

下面的独立性定义在第 5 章中已经出现过，这里为了行文完整再次给出.

定义 7.1.6 设 $f_i : R^N \to R(i = 1, \cdots, l), PS = \{f_i(\lambda) | i = 1, \cdots, l\}$. $f : R^N \mapsto R$，称 PS 在点 $\lambda_* \in \mathrm{Zero}(PS)$ 关于 f 是独立的，如果下述条件成立

i) λ_* 在 R^N 中的每个开邻域包含一点 λ，使得 $f_l(\lambda) f(\lambda) < 0$.

ii) $\mathrm{Zero}(f_1, \cdots, f_j)(2 \leqslant j \leqslant l - 1)$ 满足：如果 $\lambda \in \mathrm{Zero}(f_1, \cdots, f_j)$ 且 $f_{j+1}(\lambda) \neq 0$，则任意 λ 的邻域 W 中存在点 $\sigma \in \mathrm{Zero}(f_1, \cdots, f_{j-1})$，使得 $f_j(\sigma)$ $f_{j+1}(\lambda) < 0$.

iii) 如果 $\lambda \in \mathrm{Zero}(f_1)$ 且 $f_2(\lambda) \neq 0$，则 λ 的任意开邻域中存在点 σ，使得 $f_1(\sigma) f_2(\lambda) < 0$.

该定义中的 λ_* 一般可由 mrealroot 算法解得.

定理 7.1.7（有限阶分支定理）假设向量场满足前述假设，原点相应于参数 λ_* 为 k 阶的弱中心. 如果 Taylor 系数 $p_2, p_4, \cdots, p_{2k}$ 为在点 λ_* 关于 p_{2k+2} 独立的，则对于 $n \leqslant k$，相应于参数值 λ_*，弱中心均可分支出 n 个临界周期.

由该定理，我们只要用 mrealroot 算法求出了 $p_2 = 0, p_4 = 0, \cdots, p_{2k} = 0, p_{2k+2} \neq 0$ 的一组解，则弱中心的临界周期分支个数的下界问题就解决了.

对于等时中心，也有类似的结论.

定理 7.1.8（等时中心分支定理）假设向量场满足上述假设，相应于参数 λ_* 原点是等时中心. 如果函数 $\rho := P - 2\pi$ 的 Taylor 系数属于环 $R\{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}_{\lambda_*}$ 上的理想 $(p_2, p_4, \cdots, p_{2k+2})$，则相应于参数值 λ_*，等时中心至多可分支出 k 个局部临界周期. 此外，如果 $p_2, p_4, \cdots, p_{2k}$ 为在点 λ_* 关于 p_{2k+2} 独立的，则对于 $n \leqslant k$，相应于参数值 λ_*，中心均可分支出 n 个临界周期.

现在，我们给出二次微分系统的完整结论.

对于任意一个原点被周期轨包围的二次系统，通过一个线性变换，都可以写成 Bautin 形式：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5) xy + \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} &= x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4) xy - \lambda_2 y^2.\end{aligned}$$

由于我们关心的是中心情形，不妨假设 $\lambda_1 = 0$，并记系统为 $B_\lambda, \lambda = (\lambda_2, \cdots, \lambda_6)$.

计算其前三阶焦点量 v_3, v_5 和 v_7 有：

$$v_3(\lambda) = -\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6),$$

$$v_5(\lambda) = \lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(5\lambda_3 - 5\lambda_6 + \lambda_4),$$

$$v_7(\lambda) = -\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)^2(2\lambda_6^2 - \lambda_3\lambda_6 + \lambda_2^2).$$

应用中心定理于二次系统，可以知道，当且仅当

$$v_3(\lambda) = v_5(\lambda) = v_7(\lambda) = 0$$

时， B_λ 的原点为中心.

由 $v_3(\lambda) = v_5(\lambda) = v_7(\lambda) = 0$, 我们可以得到如下的集合：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_1 = \{\lambda|\lambda_4 = \lambda_5 = 0\},\\
&\mathcal{B}_2 = \{\lambda|\lambda_3 = \lambda_6\},\\
&\mathcal{B}_3 = \{\lambda|\lambda_5 = \lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6 = \lambda_3\lambda_6 - 2\lambda_6^2 - 2\lambda_2^2 = 0\},\\
&\mathcal{B}_4 = \{\lambda|\lambda_2 = \lambda_5 = 0\}.
\end{aligned}$$

记 $BV = \bigcup_{i=1}^4 \mathcal{B}_i$, 称为 Bautin 仿射簇. 我们将考虑 $\lambda_* \in BV$ 时，二次系统对应的弱中心的阶数和扰动参数 λ_* 得到的临界周期的分支. 通过分别在 $\mathcal{B}_i(i = 1, \cdots, 4)$ 上考查周期系数的理想成员问题，并且验证周期系数 p_2, p_4, p_6 的独立性，可以得到如下的

定理 7.1.9 （二次弱中心分支定理） i) 如果一个二次系统有一有限阶的弱中心，则至多可由该中心分支出两个局部临界周期. 此外，一阶的弱中心分支出一个临界周期，二阶的弱中心可以分支出一个或者两个临界点.

ii) 对于一个非线性二次系统的等时中心，至多可以分支出一个临界周期. 一个线性等时中心至多可以分支出两个临界周期. 在这两种情况下，都可以在 BV 中扰动参数，得到临界周期的最大值.

这个定理解决的是中心的分支问题，下面的定理指出了二次系统具有等时中心的充要条件.

定理 7.1.10 （Loud's 定理） Bautin 形式的二次系统

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2,\\
\dot{y} &= x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2
\end{aligned}$$

在 (0,0) 为等时中心，当且仅当系统是线性的或者系统可通过坐标变换成为

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + xy,\\
\dot{y} &= x + Dx^2 + Fy^2,
\end{aligned}$$

而 $(D,F)\in R^2$ 是以下四点之一：

$$I_1(0,1),\ I_2\left(-\frac{1}{2},2\right),\ I_3\left(0,\frac{1}{4}\right),\ I_4\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

特别地，如果 $\lambda\in\mathcal{B}_1$ 并且 Bautin 系统 B_λ 对应于一个阶数为 k 的弱中心，则 B_λ 是线性的. 此外，一个二次系统的非等时弱中心的阶数至多为二. 最后，一个 Bautin 形式的系统的原点为等时中心，当且仅当 $\lambda=(\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)$ 属于下列集合之一：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{BB}_1=\{\lambda|\lambda_3=\lambda_6,\lambda_4=-4\lambda_3,\lambda_5=-4\lambda_2\},\\
&\mathcal{BB}_2=\{\lambda|\lambda_2=\lambda_5=\lambda_6=0,\lambda_4=-3\lambda_3\},\\
&\mathcal{BB}_3=\{\lambda|\lambda_2=\lambda_5=\lambda_6=0,\lambda_4=-6\lambda_3\},\\
&\mathcal{BB}_4=\{\lambda|\lambda_2=\lambda_5=0,\lambda_3=-4s,\lambda_4=10s,\lambda_6=-s,s\in R\}.
\end{aligned}$$

7.2 三次系统的等时中心

本节我们将给出一个临界点为等时中心的必要条件的算法. 在考察必要条件的同时，通过一些等时中心充分条件的定理，往往可以证明这些必要条件也是充分的，从而得到某些特殊类的三次系统存在等时中心的充要条件. 我们将介绍利用此算法，得到的三次 Kukles 的等时中心条件和某些特殊三次系统的等时中心条件.

考察平面微分多项式系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=P(x,y),\\
\dot{y}&=Q(x,y).
\end{aligned}\tag{7.1}$$

定义 7.2.1 微分多项式系统的中心是非退化的，如果向量场的线性部分有两个非零特征值.

一个具有非退化中心的平面微分多项式系统可以通过仿射变换变成如下形式：

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=-y+p_\lambda(x,y),\\
\dot{y}&=x+q_\lambda(x,y),
\end{aligned}\tag{7.2}$$

其中，对于任意的参数 λ 原点是中心. 通过考察退化中心的周期函数，可以证明：

定理 7.2.2 一个等时中心是非退化的.

下面的两个定理由非退化中心的 Poincarè 和 Liapunov 特征值得到.

定理 7.2.3 一个解析系统存在一个非退化中心，则存在一个解析的坐标变换 $u = x + o(|(x,y)|), v = y + o(|(x,y)|)$ 和一个解析函数 f, 使得系统具有形式

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v(1 + f(u^2 + v^2)),\\ \dot{v} &= u(1 + f(u^2 + v^2)).\end{aligned}$$

定理 7.2.4 一个解析系统的中心是等时的，当且仅当存在一个解析的坐标变换 $u = x + o(|(x,y)|), v = y + o(|(x,y)|)$, 使得系统成为线性等时系统

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -kv,\\ \dot{v} &= ku,\end{aligned}$$

这里 k 是常数.

现在考虑一个求等时中心的必要条件的算法.

对于一个有非退化等时中心的系统 (7.2), 由定理 7.2.3, 可以通过仿射变换而具有形式：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + O(x^2 + y^2),\\ \dot{y} &= x + O(x^2 + y^2).\end{aligned} \tag{7.3}$$

并且存在解析的坐标变换 $X = x + F(x,y), Y = y + G(x,y)$, 使得 (7.3) 成为

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -Yf(X^2 + Y^2),\\ \dot{Y} &= Xf(X^2 + Y^2),\end{aligned}$$

这里， f 是解析的，且 $f(0) = 1$.

再由定理 7.2.4, 如果中心是等时的，则 f 必须是常数．即有

$$\dot{X} = -Y, \qquad \dot{Y} = X. \tag{7.4}$$

显然这时存在解析函数 $H(x,y)$(具有形式 $x + F(x,y)$) 使得

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}t^2} + H = 0. \tag{7.5}$$

反之, 如果对于给定的系统 (7.3) 存在这样的函数 $H(x,y)$, 则令 $X = H, Y = -\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$, 我们得到解析的坐标变换，使得 (7.3) 具有形式 (7.4).

以下算法就是基于寻找函数 $H(x,y)$. 由 (7.4), 我们可以得到系统的首次积分

$$\Phi(x,y) = X^2 + Y^2 = x^2 + y^2 + O(x^2 + y^2)$$

使得 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t=0$, 且容易证明，如果 H 是 (7.5) 的解，则对于任意的常数 a,b 和正整数 n,

$$\left(aH+b\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right)\Phi^n=(ax-by)(x^2+y^2)^n+O((x^2+y^2)^{n+1})$$

也是 (7.5) 的解.

如果记

$$H=\sum_k H_k,$$

这里 H_k 是次数为 k 的齐次多项式，且 $H_1=x$, 则由 (7.5) 的线性部分，我们在选择 H_k(对于奇数 $k\geqslant 3$) 时，有两个自由度.

我们希望解决如下的问题：找到函数 $H(x,y)=x+F(x^2+y^2)$ 存在的充要条件，使得

$$\begin{aligned}P^2H_{xx}+2PQH_{xy}+Q^2H_{yy}+(P_xP+P_yQ)H_x\\+(Q_xP+Q_yQ)H_y+H=0.\end{aligned}\tag{7.6}$$

这可以通过逐次求 H 展式中的项来处理. 假设我们已经求得 H_j, $j\leqslant k-1$, 考察等式 (7.6) 中次数为 k 的项，可以得到

$$y^2H_{kxx}-2xyH_{kxy}+x^2H_{kyy}+(1-k)H_k=G.$$

这里， G 是一个次数为 k 的齐次多项式，它的系数是 $H_j(j\leqslant k-1)$ 的多项式. 考虑 k 次单项式空间上的线性算子

$$y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(1-k).\tag{7.7}$$

为了得到算子的秩，我们考虑 (7.7) 在变换 $z=x+iy,\bar{z}=x-iy$ 下的形式

$$-z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2z\bar{z}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}-\bar{z}^2\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}+(1-k).\tag{7.8}$$

容易知道，(7.8) 有相应于特征值 $1-(r-s)^2$ 的特征函数 $z^r\bar{z}^s(r+s=k)$. 从而对于实的情形 (7.7), 我们有相应于特征值 $1-(r-s)^2$ 的特征函数 $az^r\bar{z}^s+\bar{a}z^s\bar{z}^r$. 从而当 k 是偶数的时候，算子是满秩的，存在惟一的 H_k 满足方程 (7.6). 当 k 是奇数时，算子的零空间秩为二，并且核中函数具有形式：

$$(a+ib)z^{(k-1)/2}\bar{z}^{(k+1)/2}+(a-ib)z^{(k+1)/2}\bar{z}^{(k-1)/2}=2(ax+by)(x^2+y^2)^{(k-1)/2}.$$

这符合我们选择 H 的 (7.5) 的自由度. 不失一般性，我们令奇数 k, xy^{k-1} 和 y^k 的系数为零. 从而，为了求解 (7.6), 我们将由 $z(z\bar{z})^{(k-1)/2}$ 和 $\bar{z}(z\bar{z})^{(k-1)/2}$ 的系

数为零对于 G 系数的影响得到一致性条件. 这就是我们的等时中心存在的必要条件. 对于每个 k 求解方程 (7.6), 则我们得到一列无穷多的条件. 这列无穷条件集合也是充分的, 由归纳法易知, 这些条件是 P, Q 系数的多项式, 由 Hilbert 基定理, 存在有限个多项式组成的等时中心的条件.

下面我们将用 Kukles 系统作为例子, 说明该算法. 我们知道 Kukles 系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3. \end{aligned} \tag{7.9}$$

尽管一般情况下, Kukles 系统的原点为中心的充要条件的问题还没有解决, 但对于原点是等时中心的情况已完全解决了.

通过上述算法, 我们可以求得 (7.9) 的原点是等时中心的前六对条件. 对于等时中心, 这十二个多项式同时为零是必要条件. 通过吴方法或 Gröbner 基可以将这些条件约化. 我们得到最初的两个条件是

$$bc + ab + e + 3g = 0, \qquad 4c^2 + 10ac + 10a^2 + b^2 + 9b + 3f = 0.$$

替代求出的 e, f, 得到随后的一个条件是

$$(17c^3+48ac^2+45a^2c+2b^2c+10a^3+ab^2)b+6(c-a)bd+(15c^2+42ac+15a^2+3b^2)g = 0.$$

首先, 假设 $(c-a)/b \neq 0$. 我们可以对系统进行变换

$$x \mapsto \frac{x}{k}, y \mapsto \frac{y}{k}.$$

所以, 不妨假设 $c - a = 1$, 如果我们再令 $g = \lambda b$, 则上式可以化为

$$d = -\frac{[(72a^2 + 72a + 3b^2 + 15)\lambda + 120a^3 + 192a^2 + 99a + 3ab^2 + 2b^2 + 17]}{6}$$

计算其余九个多项式的 Gröbner 基, 则有 $a = -1/2, b^2 + 1 = 0$. 故考虑 $b = 0$ 的情形, 此时计算后十个多项式的 Gröbner 基, 则需要满足 $a = c = 0$ 和 $d^2 + g^2 = 0$, 此时系统的所有参系数都为零.

当 $a = c$ 且 $b \neq 0$ 时, 计算 Gröbner 基得到 $a = c = 0$ 且 $d = -b^2/9$, 即系统为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + bxy - \frac{b^2x^3}{9}. \tag{7.10}$$

由变换 $x = X, y = Y + b(X^2 - Y^2)/6$ 我们可以将系统 (7.10) 化为

$$\dot{X} = Y + \frac{b(X^2 - Y^2)}{6}, \qquad \dot{Y} = -X + \frac{bXY}{3}.$$

该系统的原点为等时中心由下面的定理可以得到.

定理 7.2.5 系统 (7.1) 在点 p 为等时中心的一个充分条件是：它满足 Cauchy-Riemann 条件 $P_x = Q_y, P_y = -Q_x$ 且 $P(p) = Q(p) = P_x(p) = 0, P_y(p) \neq 0$.

至此，我们得到了如下的结果：

定理 7.2.6 Kukles 系统 (7.9) 在原点为等时中心当且仅当它具有形式 (7.10).

现在已知的很多结果，都是针对某一类系统，利用上述算法，分别由不同的技巧，构造得出等时中心的必要条件. 再像上述的定理 7.2.5 一样，由其他相关的定理，证明这些必要条件同时也是充分的.

下面我们再考察如下三次系统的等时中心：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + X_2(x,y) + X_3(x,y),\\ \dot{y} &= x + Y_2(x,y) + Y_3(x,y),\end{aligned}$$

其中，三次齐次项 $X_3^2 + Y_3^2 \neq 0$ 且满足 $xY_3(x,y) - yX_3(x,y) \equiv 0$.

由极坐标变换，系统变成

$$\begin{aligned}\dot{r} &= P_2(\phi)r^2 + P_3(\phi)r^3,\\ \dot{\phi} &= 1 + Q_2(\phi)r,\end{aligned} \tag{7.11}$$

此时 P_2, P_3, Q_2 都是三角多项式，分别为

$$\begin{aligned}P_2(\phi) &= a_3\cos 3\phi + a_1\cos\phi + a_2\sin\phi,\\ P_3(\phi) &= c_0 + c_1\cos 2\phi + c_2\sin 2\phi,\\ Q_2(\phi) &= -a_3\sin 3\phi + b_1\cos\phi + b_2\sin\phi.\end{aligned}$$

当原点是等时中心时, 由上述的算法, 我们要找到解析函数 H. 由 $\ddot{H}+H=0$, 我们得到

$$\begin{aligned}&H_n'' + H_n + 2Q_2H_{n-1}'' + (2(n-1)P_2 + Q_2')H_{n-1}' +\\ &(n-2)P_2'H_{n-1} + Q_2^2H_{n-2}'' +\\ &(2(n-2)P_3 + Q_2Q_2' + (2(n-2)+1)P_2Q_2)H_{n-2}' +\\ &(n-2)((2(n-2)+1)P_2^2 + P_2'Q_2 + P_3')H_{n-2} +\\ &(2(n-3)+1)P_3Q_2H_{n-3}' + (n-3)((2(n-2)+1)P_2P_3 +\\ &Q_2P_3')H_{n-3} + (n-4)(n-2)P_3^2H_{n-4}\\ =&\begin{cases}\alpha_n\cos\omega + \beta_n\sin\omega, & n \equiv 1(\mathrm{mod}2);\\ 0, & n \equiv 0(\mathrm{mod}2).\end{cases}\end{aligned}$$

这里， $n = 2, 3, \cdots$, $H_1(\omega) = \cos\omega$, α_n 和 β_n 称为等时常数. 等时常数是系统 (7.11) 中系数的多项式. 由 Hilbert 基定理，等时常数全体生成的理想存在有限

基，但是如同处理中心问题一样，我们一般得不到具体的基的个数. 因此，考虑等时常数中的前 n 个，我们可以得到原点为等时中心的必要条件. 再由其他方法，可以得到充分性.

定理 7.2.7 系统 (7.11) 的原点是等时中心当且仅当系统在极坐标下具有如下表达式之一：

(a) $\dot{r} = r^2(\cos 3\omega - \frac{7}{3}\cos\omega - k_1\sin\omega) + r^3(-\frac{2k_1}{3} - \frac{2k_1}{3}\cos 2\omega - \frac{k_1^2}{2}\sin 2\omega)$,
$\dot{\omega} = 1 + r(-\sin 3\omega + k_1\cos\omega - \sin\omega)$,

(b) $\dot{r} = r^2(\cos 3\omega + \frac{13}{3}\cos\omega - k_1\sin\omega) + r^3(2k_1 + \frac{10k_1}{3}\cos 2\omega - \frac{k_1^2}{2}\sin 2\omega)$,
$\dot{\omega} = 1 + r(-\sin 3\omega + k_1\cos\omega + \frac{1}{3}\sin\omega)$,

(c) $\dot{r} = r^2 a_1\cos\omega + r^3(c_1\cos 2\omega + c_2\sin 2\omega)$,
$\dot{\omega} = 1 + ra_1\cos\omega$,

(d) $\dot{r} = r^2(a_1\cos\omega + a_2\sin\omega) + r^3(\frac{a_1a_2}{2} - \frac{a_1a_2}{2}\cos 2\omega + c_2\sin 2\omega)$,
$\dot{\omega} = 1 + ra_1\cos\omega$,

(e) $\dot{r} = r^2(a_1\cos\omega + a_2\sin\omega) + r^3(c_0 + c_1\cos 2\omega + c_2\sin 2\omega)$,
$\dot{\omega} = 1$.

7.3 三次系统弱中心的阶数

本节我们考察可逆三次系统的弱中心的阶数. 首先，我们给出计算周期系数的算法，然后由 mrealroot 算法，寻找这些周期系数的实根，从而得到弱中心阶数的下界.

所谓可逆三次系统就是一个平面微分系统关于某个直线对称，通过坐标变换，任何一个可逆三次系统具有形式

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + a_1x^2 + a_2y^2 + a_3x^2y + a_4y^3,\\ \dot{y} &= x + b_1xy + b_2x^3 + b_3xy^2,\end{aligned}$$

参数 $(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3) \in R^7$. 对称性保证了系统的原点是中心. 在极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 下，系统变成

$$\begin{aligned}\dot{r} &= P_2(\theta)r^2 + P_3(\theta)r^3,\\ \dot{\theta} &= 1 + Q_2(\theta)r + Q_3(\theta)r^2,\end{aligned}$$

这里,

$$
\begin{aligned}
P_2(\theta) &= a_1\cos^3\theta + (a_2+b_1)\sin^2\theta\cos\theta,\\
P_3(\theta) &= (a_3+b_2)\cos^3\theta\sin\theta + (a_4+b_3)\sin^3\theta\cos\theta,\\
Q_2(\theta) &= (-a_1+b_1)\cos^2\theta\sin\theta - a_2\sin^3\theta,\\
Q_3(\theta) &= (-a_3+b_3)\cos^2\theta\sin^2\theta + b_2\cos^4\theta - a_4\sin^4\theta.
\end{aligned}
$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{P_2(\theta)r^2 + P_3(\theta)r^3}{1+Q_2(\theta)r+Q_3(\theta)r^2}. \tag{7.12}$$

因为对于任意的 θ, 函数 $Q_2(\theta)$ 和 $Q_3(\theta)$ 是一致有界的，所以对于足够小的 r, $\dfrac{1}{1+Q_2(\theta)r+Q_3(\theta)r^2}$ 是解析的，将其展开

$$\frac{1}{1+Q_2(\theta)r+Q_3(\theta)r^2} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k A_k. \tag{7.13}$$

则我们可以得到，在 $r=0$ 的足够小邻域内，有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^2P_2 + \sum_{k=3}^{\infty} r^k (P_2A_{k-2} + P_3A_{k-3}). \tag{7.14}$$

其为解析的，且

$$A_0 = 1,\ A_1 = -Q_2, \qquad A_k = -Q_3A_{k-2} - Q_2A_{k-1}, \qquad k \geqslant 2.$$

令 $\lambda = (a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3)$, 设 (7.12) 过 $r(0,\lambda)=r_0$ 的解具有形式

$$r(\theta,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(\theta,\lambda) r_0^k, \tag{7.15}$$

初始条件为

$$\mu(0,\lambda) = 1, \mu_k(0,\lambda) = 0, \forall k > 1, \lambda \in R^7.$$

将 (7.15) 代入方程 (7.14), 比较 r_0^k 的系数，我们得到如下的微分方程组：

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= 0,\\
\mu_2' &= P_2\mu_1^2,\\
\mu_3' &= (P_2A_1 + P_3)\mu_1^3 + 2\mu_1\mu_2P_2,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

这里，$\mu_k' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mu_k$. 由上面的初始条件，我们可以逐个求解这些微分方程，

$$\begin{aligned}
\mu_1(\theta) &= 1,\\
\mu_2(\theta) &= \int_0^\theta P_2(\xi)\mathrm{d}\xi,\\
\mu_3(\theta) &= \int_0^\theta (P_3(\xi) + P_2(\xi)(2\mu_2(\xi) - Q_2(\xi)))\mathrm{d}\xi,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

下面，我们计算过 $(r_0, 0)$ 的闭轨 $C(r_0)$ 的周期 $P(r_0, \lambda)$, 由上面的计算我们知道

$$\begin{aligned}
P(r_0,\lambda) &= \int_C (r_0)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + Q_2(\theta)r + Q_3(\theta)r^2}\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left(1 + \sum_{k=1}^\infty r^k A_k\right)\mathrm{d}\theta\\
&= 2\pi + \int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^\infty r^k A_k \mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

由 r 的展式，我们可以得到

$$\sum_{k=1}^\infty r^k A_k = A_1\mu_1 r_0 + (A_1\mu_2 + A_2\mu_1^2)r_0^2 + (A_1\mu_3 + 2A_2\mu_1\mu_2 + A_3\mu_1^3)r_0^3 +$$
$$(A_1\mu_4 + A_2(\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3) + 3A_3\mu_1^2\mu_2 + A_4\mu_1^4)r_0^4 + \cdots,$$

从而得到

$$P(r_0,\lambda) = 2\pi + \sum_{k=1}^\infty p_k(\lambda) r_0^k,$$

这里，

$$\begin{aligned}
p_1(\lambda) &= \int_0^{2\pi} A_1\mu_1 \mathrm{d}\theta = -\int_0^{2\pi} Q_2(\theta)\mathrm{d}\theta = 0,\\
p_2(\lambda) &= \int_0^{2\pi}(A_1\mu_2 + A_2\mu_1^2)\mathrm{d}\theta,\\
p_3(\lambda) &= \int_0^{2\pi}(A_1\mu_3 + 2A_2\mu_1\mu_2 + A_3\mu_1^3)\mathrm{d}\theta,\\
p_4(\lambda) &= \int_0^{2\pi}(A_1\mu_4 + A_2(\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3) + 3A_3\mu_1^2\mu_2 + A_4\mu_1^4)\mathrm{d}\theta,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

A_k 和 $\mu_k (k = 1, 2, \cdots)$ 可以由前面逐次计算出．所以 $p_k (k = 1, 2, \cdots)$ 都是可计算的．这样，我们得到了计算周期系数多项式 $p_2, p_4, \cdots, p_{2k}, \cdots$ 的算法．显然

$P(0,\lambda)=2\pi$. 由周期系数引理，我们知道，若 $p_2(\lambda_*)=p_4(\lambda_*)=\cdots=p_{2k}(\lambda_*)=0$, 则有 $p_{2k+1}(\lambda_*)=0$. 所以我们仅考虑偶数次的周期系数. 且由有限阶分支定理，我们知道，用 mrealroot 算法求得的 $\lambda_*\in R^7$, 使得 $p_2(\lambda_*)=p_4(\lambda_*)=\cdots=p_{2k}(\lambda_*)=0$ 且 $p_{2k+2}(\lambda_*)\neq 0$, 这里 $k\geqslant 1$, 则原系统在参数 $\lambda=\lambda_*$ 时，原点是阶数为 k 的弱中心. 否则 $p_k=0,\forall k$, 则原点是等时中心.

由 Maple 按上述算法计算得到前 6 个周期系数多项式分别为 10, 49, 168, 462, 1092 和 2310 项. 限于篇幅，我们仅给出

$$p_2:=1/12\pi(4a_1^2+10a_2^2-5b_1a_1+10a_2a_1+b_1^2-b_1a_2+3a_3-3b_3-9b_2+9a_4).$$

对于这组有七个变元 $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3$ 的多项式，直接计算吴 - 特征值和 Gröbner 基都是不可能的. 固定一些变量的值，我们可以得到一些比较好的结果.

例如，我们固定 $a_1=1,a_2=2,a_3=3,a_4=4,b_1=5,b_2=6$, 则由 p_2 求得 $b_3=15$, 此时容易知道 $p_4=73643/144\pi\neq 0$. 这样，由有限阶分支定理，我们知道在参数 $a_1=1,a_2=2,a_3=3,a_4=4,b_1=5,b_2=6,b_3=15$ 时，三次可逆系统的原点是一阶的弱中心.

若令 $2a_1=-2a_2=b_1=-2a,a\neq 0$, 此时系统为

$$S_\lambda:\begin{cases}\dot{x}=-y-ax^2+ay^2+a_3x^2y+a_4y^3,\\ \dot{y}=x-2axy+b_2x^3+b_3xy^2,\end{cases}\tag{7.16}$$

记系统的参系数 $\lambda=(a,a_3,a_4,b_2,b_3)\in R^5$, 另外记

$$\begin{aligned}&S_{\mathrm{I}}=\{\lambda\in R^5|a_3=b_3=-3a_4=-3b_4\},\\&S_{\mathrm{II}}=\{\lambda\in R^5|a_3=b_3,a_4=b_2=0\},\\&S_{\mathrm{III}}=R^5\backslash S_{\mathrm{I}}\backslash S_{\mathrm{II}}.\end{aligned}$$

定义 7.3.1 称系统 S_λ 有一个 I 类 (相应的 II, III 类) 的中心，如果它是非线性的且 $\lambda\in S_{\mathrm{I}}$(相应的 $S_{\mathrm{II}},S_{\mathrm{III}}$).

则有

定理 7.3.2 对于系统 (7.16), 一个 I 类或 II 类的中心是等时中心，一个 III 类的中心是阶数至多为 4 的弱中心.

通过将 I 类系统写成复数形式，并且验证 Cauchy-Riemann 条件，可以证明 I 类中心是等时的. 对于 II 类系统，通过极坐标变换，并且通过积分求周期函数知道 $P(r_0,\lambda)=2\pi$, 即 II 类中心是等时的.

当 $\lambda \in S_{\rm III}$ 时，我们计算系统的周期系数，变元序设为 $b_3 \prec a_3 \prec b_2 \prec a_4$，令 $q_2 = p_2$, q_{2k} 是 p_{2k} 模理想 $\langle q_2, \cdots, q_{2k-2}\rangle$ 得的余式，

$$\begin{aligned}
&q_2 := -b_3 + a_3 + 3a_4 - 3b_2,\\
&q_4 := 2(b_2 + a_4)a_3 + 9a_4^2 + 3b_2^2,\\
&q_6 := (8a^2 + 15a_4)b_2^3 + (150a_4^2 - 28a_4a^2)b_2^2 + (15a_4^3 + 32a_4^2a^2)b_2 + 12a^2a_4^3,\\
&q_8 := -132890625a_4^7 - 9071831250a_4^6a^2 + 15239407500a_4^5a^4 + 2404621800a_4^4a^6 +\\
&\qquad 724745440a^8a_4^3 - 17954688a^{10}a_4^2 - 1544704a^{12}a_4 + 184320a^{14},\\
&q_{10} := a.
\end{aligned}$$

这已经是一个三角化的多项式组，令 $a = 1$, 如下调用 mrealroot 程序，

$$\mathrm{mrealroot}([q_2, q_4, q_6, q_8], [a_4, b_2, a_3, b_3], 1/10^10, [q_{10}]),$$

可以得到 $q_2 = 0, q_4 = 0, q_6 = 0, q_8 = 0$, $q_{10} \neq 0$ 的如下七组实根：

$$\Big[\Big[[\tfrac{30982342847}{17179869184}, \tfrac{484099107}{268435456}], [-\tfrac{206777602491}{17179869184}, -\tfrac{206777602479}{17179869184}],$$
$$[\tfrac{389402083573}{17179869184}, \tfrac{389402083647}{17179869184}], [\tfrac{1102681919551}{17179869184}, \tfrac{68917619979}{1073741824}]\Big];$$

$$\Big[[-\tfrac{590126093}{8589934592}, -\tfrac{1180252185}{17179869184}], [\tfrac{334225541}{17179869184}, \tfrac{334225543}{17179869184}],$$
$$[\tfrac{7607370993}{17179869184}, \tfrac{1901842759}{4294967296}], [\tfrac{1531968903}{8589934592}, \tfrac{1531968929}{8589934592}]\Big];$$

$$\Big[[-\tfrac{590126093}{8589934592}, -\tfrac{1180252185}{17179869184}], [-\tfrac{1632336875}{17179869184}, -\tfrac{1632336873}{17179869184}],$$
$$[\tfrac{3649756067}{17179869184}, \tfrac{3649756079}{17179869184}], [\tfrac{312875633}{1073741824}, \tfrac{5006010149}{17179869184}]\Big];$$

$$\Big[[-\tfrac{590126093}{8589934592}, -\tfrac{1180252185}{17179869184}], [-\tfrac{5188649971}{17179869184}, -\tfrac{1297162491}{4294967296}],$$
$$[\tfrac{7324906241}{17179869184}, \tfrac{3662453135}{8589934592}], [\tfrac{19350099575}{17179869184}, \tfrac{4837524907}{4294967296}]\Big];$$

$$\Big[[-\tfrac{1200911236005}{17179869184}, -\tfrac{300227809001}{4294967296}], [\tfrac{65079616573}{8589934592}, \tfrac{130159233147}{17179869184}],$$
$$[\tfrac{1521187260679}{4294967296}, \tfrac{3042374521369}{8589934592}], [\tfrac{522884408815}{4294967296}, \tfrac{261442204411}{2147483648}]\Big];$$

$$\Big[[-\tfrac{1200911236005}{17179869184}, -\tfrac{300227809001}{4294967296}], [\tfrac{12016369748571}{17179869184}, \tfrac{6008184874301}{8589934592}],$$
$$[-\tfrac{5156497935993}{4294967296}, -\tfrac{20625991743927}{17179869184}], [-\tfrac{60277834697793}{17179869184}, -\tfrac{15069458674413}{4294967296}]\Big];$$

$$\Big[[-\tfrac{1200911236005}{17179869184}, -\tfrac{300227809001}{4294967296}], [-\tfrac{12770550977}{17179869184}, -\tfrac{199539859}{268435456}],$$

$$[\tfrac{5347439325113}{17179869184}, \tfrac{1336859831283}{4294967296}], [\tfrac{891508635013}{8589934592}, \tfrac{1783017270051}{17179869184}]\Big].$$

由前面的论述, 实根的存在性保证了周期系数的独立性, 从而证明了 III 类系统存在阶数为 4 的弱中心. 而 $p_{10}=a$, 说明在 $a \neq 0$ 情况下, III 类系统最多只有 4 阶的弱中心. 这就得到了定理 7.3.2 中关于 III 类中的结论.

相应的, 我们也可以通过一些其他的假设来简化参数, 得到一些相应结果.

注 释

7.1 节考虑平面向量场的临界周期分支, 有限分支定理, 等时中心分支定理, 二次弱中心分支定理及 Loud's 定理和相关的定义均可参阅 Chicone C, Jacobs M [7]. 7.2 节中, 三次系统等时中心的相关定理和等时常数计算算法以及 Kules 系统等时中心的结论可参阅 C J Christopher, J Delvin [12]. 具有退化无穷三次系统等时中心的结论由 J Chavarriga, J Giné, I Garcia [10] 给出. 7.3 节可逆三次系统弱中心阶数的判定及周期系数的计算取自 Zhang W, Hou X, Zeng Z [77].

第八章　高维系统的小扰动极限环

利用 Hirsch 的单调性理论，中心流形定理及矩阵的三角块化，将高维系统低维化. 通过降维，把高维系统平衡点的 (局部) 稳定性的判定和小扰动极限环的构造通过低维系统来实现. 本章讨论一类经典的三维 Lotka-Volterra 竞争系统的分支和极限环构造及个数. 利用 mrealroot 算法解决两个极限环个数的公开问题.

8.1　分类定理

前面几章曾考虑了平面多项式系统弱焦点，弱中心及极限环的构造和个数问题. 利用中心流形定理, 现在我们考虑三维系统的极限环的构造及个数问题. 由于其上界问题不太可能解决，我们考虑其下界问题：一个给定的三维系统至少存在多少极限环？本章我们考虑数学生物学领域中最为基本和重要的系统：Lotka-Volterra 系统.

对于二维 Lotka-Volterra 竞争系统，我们知道其极限环是不存在的. 如果此类系统存在闭轨线，则闭轨线必不孤立. 高维 Lotka-Volterra 系统极限环的存在性早在 20 世纪 70 年代末期已经由 Coste, Peyraud, Coullet 和 Hofbauer 利用 Hopf 分支定理解决.　20 世纪 80 年代中期， Zeeman 利用几何方法分析系统在平面 $x_i = 0$ 的性态，把三维 Lotka-Volterra 竞争系统分为 33 类，证明了其中的 27 类是没有极限环的，其解的极限集为不动点. 另外的 6 类 (分别为类 26, 27, 28, 29, 30 和 31) 存在极限环. 现在的问题是：在这 6 类竞争系统中，极限环的个数 (至少) 是多少？　1994 年 Hofbauer 和 So 根据 Hirsch 的单调系统理论和永久生存定理通过 Hopf 分支和 Poincaré-Bendixson 定理构造了一个具有两个极限环的三维 Lotka-Volterra 竞争系统. 该系统属于 Zeeman 分类的第 27 类，即系统具有异宿轨. 两个极限环之中的一个由小扰动得到，另一个由 Poincaré-Bendixson 定理所保证.

本章我们根据中心流形定理，将三维微分多项式系统利用 Hirsch 的单调性定理降维到其中心流形上来考虑. 对于中心流形上的二维微分多项式系统，构造其 Liapunov 函数并求其焦点量. 而对应的小扰动极限环的个数完全由焦点量的实根所决定，这恰好可以由第 3 章的 mrealroot 算法解决.

考虑具有如下形式的三维 Lotka-Volterra 竞争系统

$$\dot{x}_1 = x_1 \sum_{j=1}^{3} a_{1j}(x_j - 1),$$

$$\dot{x}_2 = x_2 \sum_{j=1}^{3} a_{2j}(x_j - 1), \tag{8.1}$$

$$\dot{x}_3 = x_3 \sum_{j=1}^{3} a_{3j}(x_j - 1),$$

其中 $a_{ij} < 0$, $\mathbf{1}= (1,1,1)$ 为系统的惟一正平衡点. 将此系统写成向量形式, 有

$$\dot{x} = \mathrm{diag}(x)A(x - 1),$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $A = (a_{ij})_{3\times3}$, $x - 1 = (x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1)$.

由变换 $\bar{x} = x - 1$, 我们将平衡点 (1, 1, 1) 移到原点, 系统变为

$$\dot{x} = \mathrm{diag}(1 + x)Ax, \tag{8.2}$$

这里, 我们用 x 替代 $\bar{x}$.

由于系统 (8.1) 为竞争系统, 我们可以利用 Hirsch 的单调性定理进行降维. Hirsch 定理保证了一个 n 维竞争系统的 ω 极限集属于一个 $n-1$ 维的不变超曲面. 另一方面, Smale 证明了任意一个 $n-1$ 维系统的动力学行为总可以由一个 n 维竞争系统来描述. 这样, 一个 n 维竞争系统的动力学行为与一个 $n-1$ 维系统的动力学行为相当. Hirsch 定理在 Lotka-Volterra 系统 (8.1) 情形可写成:

定理 8.1.1 (Hirsch 降维定理) 系统 (8.1) 的每一条位于 $\mathrm{int}R^3_+$ 的轨道趋于 Σ 中的一条轨道, 而 Σ 为 C^1 子流形, 且同胚于 R^3_+ 中的单位单型.

注 Σ 的 C^1 性由 Terescak 证明, Hirsch 的结果为 Lipschitz 性.

这样, (8.1) 在 R^3_+ 中的动力学行为完全由 Σ 所决定. Σ 可视为单位单型 $\triangle$, 即 R^3_+ 中的一个等边三角形. Σ 称为容纳单型 (carrying Simplex), 为 R^3_+ 中的二维曲面且吸引 R^3_+ 中的所有正轨道. 在 Σ 上 Poincaré-Bendixson 定理成立. 即每一个极限集为不动点或周期轨或由轨道和不动点构成的奇异轨. 这样, 由于系统 (8.1) 在 R^3_+ 中最多只有一个孤立正平衡点 (必属于 $\mathrm{int}\Sigma$), 因此 $\mathrm{int}\Sigma$ 上的 ω 极限集必由不动点或周期轨构成. 这样, 就将三维系统的极限环构造问题化为了二维问题.

现在, 我们根据 Zeeman 定义的代数不变量, 对一般的三维 Lotka-Volterra

竞争系统进行 Zeeman 分类，一般的三维 Lotka-Volterra 竞争系统具有形式

$$\dot{x}_i = x_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j\right), \qquad i = 1, 2, 3.$$

这里，为了保持与 Zeeman 定义的不变量的一致性， $a_{ij}, b_i > 0$ 与系统 (8.1) 的符号反号. 对 (8.1) 的判定我们可以通过变换很容易得到. 具体的判定通过如下计算实现.

记 R_i 为系统在 x_i 轴上的不动点， Q_i 为系统在 $x_i = 0$ 平面上的不动点. 定义不变量 R_{ij} 和 Q_{kk} 分别为

$$R_{ij} = \operatorname{sgn}((AR_i)_j - b_j) = \operatorname{sgn}(\frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{b_j}{a_{ji}}), \qquad i \neq j,$$

$$Q_{kk} = \operatorname{sgn}((AQ_k)_k - b_k),$$

其中 $(AR_i)_j$ 为 AR_i 的第 j 个分量， $(AQ_k)_k$ 为 AQ_k 的第 k 个分量.

注意， Q_k 可能不存在， Q_{kk} 也可能不存在.

表 2 为 Zeeman 的 33 种分类：

第 1 至 18 类中，系统没有正平衡点；

第 19 至 25 类中，系统存在惟一的正平衡点，但该点不会发生 Hopf 分支；

第 26 至 31 类中，系统的正平衡点发生 Hopf 分支，通过小扰动我们可以得到极限环；

第 32 至 33 类中，系统在 $x_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ 平面上的平衡点均是鞍点，系统没有孤立周期解存在.

特别地，当 $R_{12} = R_{23} = R_{31}, R_{21} = R_{13} = R_{32}$ 且 $R_{ij}R_{ji} < 0$ 时，系统属于类 27, 它存在一个异宿轨. 为考察该异宿轨的稳定性，我们定义

$$p = \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{13}\alpha_{32},$$

其中 $\alpha_{ij} = b_j - (AR_i)_j$. 当 $p > 0$ 时，异宿轨是排斥的；而当 $p < 0$ 时，异宿轨是吸引的.

下面，我们将根据 Hirsch 的单调理论，沿 Hofbauer 和 So 的思路，利用线性变换将三维 Lotka-Volterra 系统的系数矩阵化为分块对角型；构造中心流形将三维系统降维；最后将极限环构造问题化为多项式组实根的存在问题，利用 mrealroot 算法给出结论. 本章的结果给出了 Hofbauer 和 So 的一个公开问题的解答，否定了他们关于三维 Lotka-Volterra 竞争系统极限环最大个数的猜想，同时给出了非竞争三维系统存在两个极限环的例子.

表 2

Class	R_{12}	Q_{33}	R_{21}	R_{23}	Q_{11}	R_{32}	R_{31}	Q_{22}	R_{13}
1	1		−1	−1		1	−1		1
2	1	−1	1	−1		1	−1		1
3	1		−1	1	−1	1	−1		1
4	−1	1	−1	1	−1	1	−1		1
5	−1	1	−1	1		−1	1		−1
6	−1		1	−1	1	−1	1		−1
7	−1	−1	−1	−1		1	1		−1
8	−1	−1	−1	1	−1	1	1		−1
9	−1	−1	−1	−1	1	−1	1		−1
10	−1	1	−1	−1	−1	−1	1		−1
11	−1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	−1
12	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
13	1	1	1	1		−1	−1		1
14	1	1	1	−1	1	−1	−1		1
15	1	1	1	1	−1	1	−1		1
16	1	−1	1	1	1	1	−1		1
17	1	−1	1	−1	1	−1	1	1	1
18	1	−1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	−1	1	1		−1	−1		1
20	1	−1	1	1	−1	1	−1		1
21	1	−1	1	1	−1	1	-1	1	−1
22	−1		1	1	−1	1	−1	1	−1
23	−1	1	−1	−1		1	1		−1
24	−1	1	−1	−1	1	−1	1		−1
25	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1
26	1		−1	−1	−1	−1	1	1	1
27	−1		1	−1		1	−1		1
28	1	1	1	−1		1	−1		1
29	−1	−1	−1	1		−1	1		−1
30	1	1	1	1	1	1	1		1
31	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1		−1
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1
33	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

8.2 中心流形构造

处理高维问题，通常的做法是降维．如果我们能将一高维系统转化为低维系统，且保持某些性质不变，则我们可以通过处理低维系统从而得到高维系统的性质．中心流形定理是处理高维微分多项式系统解结构的有效定理，本章中我们将展现其在处理三维 Lotka-Volterra 竞争系统的极限环构造方面的强大威力．

考虑如下的多项式微分系统：

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n. \tag{8.3}$$

原点为其平衡点，即 $f(0) = 0$. $f(x)$ 的线性部分为 Ax, 其中 $A = Df(0)$ 为 f 在原点的 Jacobi 矩阵．如果 A 的特征值没有零实部，则由 Hartman 定理可知：在原点的邻域内，系统 (8.3) 和其线性部分是同胚的，即系统 (8.3) 和其线性部分的解具有相同的定性性质．特别地，如果 A 的特征值具有正实部，则原点是不稳定的；如果 A 的特征值都具有负实部，则原点是稳定的．当 A 的特征值具有零实部时，原点附近解的形态可能会很复杂.

下面，我们考虑线性部分具有非正实部特征值的 $n \times n$ 阶矩阵 A 的系统：

$$\dot{x} = Ax + R(x), \qquad x \in R^n,$$

其中 $R(x) = o(|x|^2)$. 由线性代数的基本知识我们知道，存在线性变换 T, 使得 A 相似于一个对角矩阵，即

$$TAT^{-1} = C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2 是常数矩阵，秩分别为 n_1, n_2, 满足 $n_1 + n_2 = n$, 且 C_1 的特征值具有零实部， C_2 的特征值具有负实部．作变换 $(u, v) = Tx$, 则原系统变为

$$\begin{aligned} \dot{u} &= C_1 u + R_1(u, v), \\ \dot{v} &= C_2 v + R_2(u, v). \end{aligned} \tag{8.4}$$

R_1 和 R_2 光滑，显然有 $R_1(0) = R_2(0) = 0$, $DR_1(0) = DR_2(0) = 0$.

定义 8.2.1 称曲面 $v = h(u)$ 为系统 (8.4) 的不变流形, 如果 $(u(0), h(u(0)))$ 位于曲面 $v = h(u)$ 上，则系统 (8.4) 过 $(u(0), h(u(0)))$ 的解 $(u(t), v(t))$ 也落在 $v = h(u)$ 上，即 $v(t) = h(u(t))$.

如果 R_1 和 R_2 恒为零，显然系统 (8.4) 具有两个不变流形 $u = 0$ 和 $v = 0$. 不变流形 $u = 0$ 称为稳定流形，当初值限制在 $u = 0$ 上时，解趋于原点．不变

流形 $v=0$ 称为中心流形，此时所有解指数地趋于 $\dot{u}=C_1u$ 的解，即是说中心流形上的方程决定了整个系统解的性态.

定理 8.2.2 如果 $R_1,R_2\in C^\infty$, 则对任意的 $r<\infty$, 存在系统 (8.4) 的中心流形 $v=h(u)$, 当 $|u|<\delta_r$ 时， $h\in C^r$. 这里的 δ_r 依赖于 r 的选取.

在这个中心流形上，系统 (8.4) 具有 n_1 维的形式：

$$\dot{u}=C_1u+R_1(u,h(u)),\quad u\in R^{n_1}. \tag{8.5}$$

下面的定理保证了这个 n_1 维系统与原系统在原点的邻域内解具有相同的渐近行为.

定理 8.2.3 i) 假设系统 (8.5) 的原点是局部稳定的 (渐近稳定的，不稳定的), 则原系统 (8.4) 的原点是局部稳定的 (渐近稳定的，不稳定的).

ii) 假设系统 (8.5) 的原点是局部稳定的，如果 $(u(t),v(t))$ 是系统 (8.4) 的解，且 $(u(0),v(0))$ 足够小，则存在 (8.5) 的解 $w(t)$ 使得，当 $t\to\infty$ 时，

$$u(t)=w(t)+o(e^{-rt}),v(t)=h(w(t))+o(e^{-rt}),$$

其中常数 $r>0$.

下面，我们将给出 $h(u)$ 的求法，即给出 n 阶近似的中心流形.

在系统 (8.4) 的第二个方程中，作替换 $v=h(u)$, 则由链式法则有

$$\dot{v}=Dh(u)\dot{u}=Dh(u)[C_1u+R_1(u,h(u))]=C_2h(u)+R_2(u,h(u))$$

或

$$N(u)=Dh(u)[C_1u+R_1(u,h(u))]-C_2h(u)-R_2(u,h(u))=0,$$

且满足边界条件 $h(0)=Dh(0)=0$. 这个偏微分方程一般情况下是不能精确求解的，但我们可以利用其解的 Taylor 展式做出任意次数的近似.

定理 8.2.4 如果一个函数 $\phi(x)$ 满足 $\phi(0)=D\phi(0)=0$, 且存在 $p>1$ 使得当 $|x|\to 0$, 时 $N(\phi(x))=o(|x|^p)$, 则当 $|x|\to 0$, 时有 $h(x)=\phi(x)+o(|x|^p)$.

下面对于一般的三维系统，我们给出构造中心流形的过程.

首先，我们构造 T, 使得系统 (8.1) 的 Jacobi 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},$$

当 A 具有一个负的实特征值 λ 和一对共轭的纯虚特征值 $\pm\omega i(\omega\neq 0)$ 时，成为分块对角形.

记

$$B = A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

则

$$\lambda = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad \lambda\omega^2 = \det A,$$

$$\omega^2 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13}.$$

B 的代数子矩阵为

$$\begin{aligned} B_{11} &= \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & b_{33}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}+a_{33})(a_{11}+a_{22}) - a_{23}a_{32} = a_{11}^2 + \omega^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}, \\ B_{22} &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = a_{22}^2 + \omega^2 + a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32}, \\ B_{33} &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{33}^2 + \omega^2 + a_{23}a_{32} + a_{13}a_{31}. \end{aligned}$$

由于 $B_{11} + B_{22} + B_{33} = \omega^2 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})^2 \neq 0$, 不失一般性，我们可以设 $B_{11} \neq 0$. 令 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ 为 A 的对应于 λ 的左特征向量，则有

$$\gamma A = \lambda \gamma.$$

现在考虑特征方程中的后两个方程

$$\begin{aligned} \gamma_1 b_{12} + \gamma_2 b_{22} + \gamma_3 b_{32} &= 0, \\ \gamma_1 b_{13} + \gamma_2 b_{23} + \gamma_3 b_{33} &= 0. \end{aligned}$$

可令

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{32} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} = B_{11}, \gamma_2 = -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{32} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix} = B_{21},$$

$$\gamma_3 = -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix} = B_{31}.$$

记 $\alpha=(0,1,0)(A-\lambda I)=(b_{21},b_{22},b_{23})$, $\beta=(0,0,1)(A-\lambda I)=(b_{31},b_{32},b_{33})$, 则我们得到变换矩阵 T_1,

$$T_1=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\\ B_{11} & B_{21} & B_{31}\end{pmatrix}.$$

这样，利用矩阵 T_1, A 可以变成分块上三角形

$$T_1AT_1^{-1}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C & C_1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

再令

$$T_2=\begin{pmatrix}I & (C-\lambda I)^{-1}C_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

和 $T=T_2T_1$, 则可以验证

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

由上述讨论，我们得到

推论 8.2.5 设一 3×3 矩阵 A 具有一个负的实特征值 λ 和一对共轭的纯虚特征值 $\pm\omega i$, $(\omega\neq 0)$, 则存在如上的矩阵 $T=T_2T_1$, 使得

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & 0\\ c_{21} & c_{22} & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

这里，子矩阵 $\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$ 有一对共轭的纯虚特征值 $\pm\omega i, (\omega\neq 0)$, 即子矩阵满足 $c_{11}+c_{22}=0$ 且 $c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}>0$.

我们注意到变换矩阵 T 的每一个元素都是矩阵 A 中元素 a_{ij} 的有理函数，它是完全构造地给出的.

利用变换 $(u,v)=Tx$, 可以将 (8.1) 变为具有分块对角形线性部分 $C(u,v)$ 的系统

$$\begin{aligned}\dot u_1&=c_{11}u_1+c_{12}u_2+R_{11}(u_1,u_2,v_1),\\ \dot u_2&=c_{21}u_1+c_{22}u_2+R_{12}(u_1,u_2,v_1),\\ \dot v_1&=\lambda v_1+R_2(u_1,u_2,v_1).\end{aligned}\tag{8.6}$$

根据定理 8.2.4, 在原点的充分小邻域，我们可以假设

$$v_1 = h(u_1, u_2) = \sum_{i=2}^{n} h_i(u_1, u_2),$$

其中 $h_i(u_1, u_2) = p_{kj} \sum_{j=0}^{k} u_1^j u_2^{k-j}$ 为 u_1, u_2 的 k 次齐次多项式.

将 $v_1 = h(u_1, u_2)$ 代入 (8.6) 的第三式，我们得到

$$\dot{v}_1 = \frac{\partial h(u_1, u_2)}{\partial u_1}\dot{u_1} + \frac{\partial h(u_1, u_2)}{\partial u_2}\dot{u_2} = \lambda h(u_1, u_2) + R_2(u_1, u_2, h(u_1, u_2)).$$

比较两边的同类项系数，可以得到以 p_{kj} 为变元的线性方程组. 通过求解可以确定 $h_i(u_1, u_2)$ $(i = 2, \cdots, n)$, 从而得到其 n 次近似的中心流形 $h(u_1, u_2)$.

将解得的 $v_1 = h(u_1, u_2)$ 代入 $\dot{u}_1$ 和 $\dot{u}_2$, 我们得到二维系统

$$\dot{u}_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + R_{11}(u_1, u_2, h(u_1, u_2)),$$

$$\dot{u}_2 = c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + R_{12}(u_1, u_2, h(u_1, u_2)).$$

由定理 8.2.3, 该系统与原系统在零点的充分小邻域内具有相同的解结构. 对于平面微分多项式系统的研究已有较为成熟的方法和大量的成果. 据此，我们可以得到原三维系统在原点邻域内的解的性质. 在处理三维 Lotka-Volterra 竞争系统的极限环构造方面，我们将展示它的具体应用.

8.3 三维系统极限环的构造

现在考虑系统 (8.2)

$$\dot{x} = \mathrm{diag}(1 + x)Ax,$$

我们用 x_i 替代 $\bar{x}_i$, i =1, 2, 3.

由第 8.2 节的引理 8.2.5, 我们可以构造 T, 在变换 $y = Tx$ 下，系统 (8.2) 变成

$$\dot{y} = T * \mathrm{diag}(T^{-1}y + \mathbf{1})AT^{-1}y = Cy + T * \mathrm{diag}(T^{-1}y)AT^{-1}y, \tag{8.7}$$

其中 $y = (y_1, y_2, y_3), \mathbf{1} = (1, 1, 1)$, $C = TAT^{-1}$ 是分块对角阵.

由中心流形定理，我们可以求得中心流形的 n 次近似 $y_3 = h(y_1, y_2)$. 在 (8.7) 的前两个方程中，用 $h(y_1, y_2)$ 替换 y_3 得到一平面微分多项式系统. 对该平面系统，利用第 5 章 5.1 节的求平面微分多项式系统焦点量的算法可以得到

直到 k 阶的焦点量. 注意到求焦点量算法中焦点量的阶对于多项式幂次的依赖关系, 我们知道, 要计算 k 阶的焦点量, 需要中心流形的 $2k$ 次近似.

求得了焦点量 $L(1), L(2), \cdots, L(k)$, 用 mrealroot 算法求解之, 可以得到小扰动极限环的个数.

最后, 我们根据 Zeeman 定义的代数不变量, 对系统进行 Zeeman 分类判定. 如果系统属于类 27, 则利用 Poincaré-Bendixson 定理, 考察系统在异宿轨和外围的小扰动极限环构成的区域内是否存在极限环. 至此, 问题得以解决.

下面是一个具有两个小扰动极限环的三维 Lotka-Volterra 竞争系统, 其 Jacobi 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & \lambda \\ -\frac{1}{10} & -1 & \mu \\ -1 & -13 & -5 \end{pmatrix}. \tag{8.8}$$

为满足特征值条件 $\det(A) = (A_{11} + A_{22} + A_{33})\mathrm{tr}(A)$ (即保证共轭特征值实部为零, 注意到 $\lambda = \mathrm{tr}(A)$, 必为负值), 需要 $\mu = -\frac{3}{2} - \frac{1}{10}\lambda$.

由变换 $y = Tx$, 即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/10 & 7 & -\frac{3}{2} - \frac{1}{10}\lambda \\ -1 & -13 & 3 \\ \frac{3}{2} - \frac{13}{10}\lambda & 15 - 13\lambda & \frac{15}{2} - \frac{13}{2}\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

原系统变为具有如下线性部分的系统:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 - \frac{1}{10}\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

即变换后系统具有形式:

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= -(1 + \frac{1}{10}\lambda)y_2 + g_{12}(\lambda; y_1, y_2), \\ \dot{y_2} &= -3y_1 + g_{22}(\lambda; y_1, y_2), \\ \dot{y_3} &= -8y_3 + g_{32}(\lambda; y_1, y_2), \end{aligned}$$

其中 $g_{i2}(\lambda; y_1, y_2)$ $(i = 1, 2, 3)$ 为 y_1, y_2 的二次多项式，其系数为 λ 的有理函数.

我们计算直到 2 阶的焦点量，需要中心流形 $y_3 = h(y_1, y_2)$ 近似到 4 阶. 由 8.2 节构造近似中心流形的算法，得到的 h 是一个关于 y_1, y_2 的 12 项多项式，其系数是 λ 的有理函数. h 具有形式

$$h := numer/denom,$$

其中

$$\begin{aligned}
denom :=\ & 128(9\lambda^2 - 3660\lambda + 372100)(177147\lambda^9 + \\
& 35548843849560000000\lambda^3 - 170126730\lambda^8 + 66527665200\lambda^7 - \\
& 13588131348000\lambda^6 + 1552278979620000\lambda^5 - 99838477265400000\lambda^4 - \\
& 654542357648400000000\lambda^2 + 5198480245491000000000\lambda - \\
& 11255145690490000000000), \\
numer :=\ & c_{20}y_1^2 + c_{21}y_1y_2 + c_{22}y_2^2 + c_{30}y_1^3 + c_{31}y_1^2y_2 + c_{32}y_1y_2^2 + \\
& c_{33}y_2^3 + c_{40}y_1^4 + c_{41}y_1^3y_2 + c_{42}y_1^2y_2^2 + c_{43}y_1y_2^3 + c_{44}y_2^4.
\end{aligned}$$

这里，由于 c_{ij} 的复杂性，我们仅给出二次项系数的表达式：

$$\begin{aligned}
c_{20} =\ & -24318740160\lambda^{11} + 5598074572560000\lambda^9 - 330372364172544000\lambda^8 + \\
& 67548658664977920000\lambda^7 - 609622453465122240000000\lambda^6 + \\
& 6846314270400\lambda^{10} - 9145331768407766880000000000000\lambda + \\
& 27449722289066100960000000000000\lambda^2 - \\
& 203069368746190915200000000000\lambda^3 + 1966937971053251520000000\lambda^5 + \\
& 18377800718750496000000000\lambda^4 + 720606373931433600000000000000000, \\
c_{21} =\ & 2394936792679680000000\lambda^7 - 1039885911593839232000000000000000\lambda + \\
& 271167401678917024000000000000\lambda^2 - 706412686024272768000000000\lambda^3 - \\
& 134076434194261209600000000\lambda^4 - 854015051531520000\lambda^9 - \\
& 368465760000\lambda^{11} + 911468590778304000\lambda^8 + \\
& 7325964194724380160000000\lambda^5 + 295599524947200\lambda^{10} - \\
& 117530568722542464000000\lambda^6 + 851927950726320000000000000000000, \\
c_{22} =\ & 12682393476427670400000000\lambda1^5 - 615638560091468064000000000\lambda^4 - \\
& 28082417981587776000000000000\lambda - 10825809653332800\lambda^9 + \\
& 188884590508800\lambda^{10} + 220104228960\lambda^{11} + \\
& 2402021246438112000000000000000 + 2141497834108416000\lambda^8 - \\
& 810624672\lambda^{12} - 180691264933381440000\lambda^7 + \\
& 23809284714823364800000000000\lambda^3 + 45243850586270976000000\lambda^6 + \\
& 6101463506886111360000000000\lambda^2.
\end{aligned}$$

将算得的 $y_3 = h(y_1, y_2)$ 代入前两个方程的右端，得到二维系统：

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= -\left(1 + \frac{1}{10}\lambda\right) y_2 + \sum_{i=2}^{5} h_{1i}(\lambda; y_1, y_2) + h.o.t, \\ \dot{y_2} &= -3y_1 + \sum_{i=2}^{5} h_{2i}(\lambda; y_1, y_2) + h.o.t, \end{aligned}$$

其中 $h_{1i}(\lambda; y_1, y_2), h_{2i}(\lambda; y_1, y_2)$ 为 y_1, y_2 的 i 次齐次多项式 $(i = 2, \cdots, 5)$, $h.o.t$ 为高于 6 次的齐次多项式 (计算 2 阶焦点量需直到 5 次的多项式),

$$\begin{aligned} h_{12}(\lambda; y_1, y_2) = &\frac{18(515\lambda + 8250 + \lambda^2)}{9\lambda^2 - 3660\lambda + 372100} xy + \frac{7(9\lambda^2 + 740\lambda + 6500)}{9\lambda^2 - 3660\lambda + 372100} y^2 + \\ &\frac{210(650 + 9\lambda)}{9\lambda^2 - 3660\lambda + 372100} x^2, \\ h_{22}(\lambda; y_1, y_2) = &\frac{129080\lambda + 1679300 + 339\lambda^2}{9\lambda^2 - 3660\lambda + 372100} xy + \frac{60(527\lambda + 23910)}{9\lambda^2 - 3660\lambda + 372100} x^2 + \\ &\frac{2(239100 + 527\lambda^2 + 29180\lambda)}{(3\lambda - 610)^2} y^2, \end{aligned}$$

而 $h_{1i}(\lambda; y_1, y_2), h_{2i}(\lambda; y_1, y_2) (i = 3, \cdots, 5)$ 分别有 22, 46, 78, 48 项.

用我们的 Maple 程序 Liapc 计算可得前两个焦点量为

$$\begin{aligned} L(1) &= f(\lambda) = f_1(\lambda)/f_2(\lambda), \\ L(2) &= g(\lambda) = g_1(\lambda)/g_2(\lambda), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) = &8635\lambda^4 + 203199\lambda^3 + 1475700\lambda^2 + 3429100\lambda + 3570000, \\ f_2(\lambda) = &18(27\lambda^3 - 12150\lambda^2 + 1592100\lambda - 48373000), \\ g_1(\lambda) = &-(1307582324430297228650000\lambda^5 - 1860209677025044500500000\lambda^4 + \\ &15498748111275\lambda^{11} - 1906755015359490586500\lambda^7 + \\ &5262817904795501912500\lambda^6 + 12505762191273552\lambda^{10} + \\ &15420305855672488 35\lambda^9 - 7952776625173111515 0\lambda^8 - \\ &2116057518072405303350000000\lambda^3 - 15735836700645269546500000000\lambda^2 - \\ &36510820627295851160000000000\lambda - 37266737411811945000000000000), \\ g_2(\lambda) = &6480(46942019547182370000000 0\lambda^2 + 426693978900\lambda^8 + 531441\lambda^{10} + \\ &2901398119794000 0\lambda^6 - 3781963741136400000\lambda^5 + \\ &312395385720402000000\lambda^4 - 15875302834691280000000\lambda^3 - \\ &724728060\lambda^9 - 719136419144995800000000\lambda - \\ &141607217736000\lambda^7 + 418803971143132900000000 0). \end{aligned}$$

调用我们的 Maple 程序 mrealroot, 参数设置如下：

$$\text{mrealroot}([f_1(\lambda)],[\lambda],\frac{1}{10^{20}},[f_2(\lambda),g_1(\lambda),g_2(\lambda),\det(A),\lambda,\mu]),$$

计算结果为

$$\left[\left[-\frac{776605156635836838215}{737869762948382064 64},-\frac{1553210313271673676429}{1475739525896764129 28}\right],[-,+,+,-,-,-]\right].$$

这说明， $numer(L(1))$ (变量为 λ) 在区间

$$\left[-\frac{776605156635836838215}{73786976294838206464},-\frac{1553210313271673676429}{147573952589676412928}\right]$$

(区间长度小于 $1/10^{20}$) 中有一实根使得 $denom(L(1))<0, numer(L(2))>0$, $denom(L(2))>0, \det(A)<0, \lambda<0, \mu<0$.

$\lambda<0,\mu<0$ 表明 A 是一个竞争系统， $\det(A)<0$ 表明 A 满足存在虚特征值的条件，且 $L(1)=0$ 的这个实根使得 $L(2)>0$.

为了分支出两个极限环，先扰动 λ 使得 $L(1)L(2)<0$ 且同时调整 μ 使得 $\mu=-\frac{3}{2}-\frac{1}{10}\lambda$, 即保证系统的线性部分依然是中心焦点型．这样，可以扰出一个极限环．再扰动 μ 使得特征值具有和 $L(1)$ 异号的实部，从而可以扰出第二个极限环．故该系统具有两个小扰动极限环.

不难判断，具有上述 λ,μ 的 (8.8) 矩阵 A 还满足

$$Q_{11}=1,Q_{33}=-1,R_{12}=-1,R_{13}=-1,$$

$$R_{21}=-1,R_{23}=1,R_{31}=1,R_{32}=1,$$

所以，该系统属于 Zeeman 分类的第 26 类.

以上的各步都是可以机械化求解的,将各个过程综合起来,我们有一个 Maple 程序 3DLVLC 可以用来统一处理三维 Lotka-Volterra 竞争系统的小扰动极限环问题．利用我们的程序，还发现了 Zeeman 分类中的 28, 29 类也具有两个小扰动极限环．我们用 PIII550 的 PC 机和 Maple V(R4) 的软件，基本上 200 秒可得到一个关于两个小扰动极限环问题的计算结果.

同时，我们注意到上述算法的各步对于非竞争 Lotka-Volterra 系统 (A 中有负的系数) 也是可行的，在我们的计算过程中也发现存在满足特征值条件且具有两个小扰动极限环的非竞争 Lotka-Volterra 系统.

考虑非竞争系统 (8.2), 其相互作用矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-2&-5&\lambda\\-1&-1&\mu\\-1&-13&-5\end{pmatrix}. \tag{8.9}$$

为满足特征值条件，必须 $\mu=-\dfrac{111}{83}-\dfrac{20}{83}\lambda$. 通过变换 $y=Tx$,

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 7 & -\dfrac{111}{83}-\dfrac{20}{83}\lambda\\ -1 & -13 & 3\\ \dfrac{300}{83}-\dfrac{260}{83}\lambda & 15-13\lambda & \dfrac{555}{83}-\dfrac{481}{83}\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

变换后的系统具有如下线性部分：

$$\begin{pmatrix}\dfrac{63}{20} & \dfrac{851}{1660}-\dfrac{20}{83}\lambda & 0\\ -\dfrac{177}{20} & -\dfrac{63}{20} & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.$$

前两个焦点量为

$$L(1)=f(\lambda)=f_1(\lambda)/f_2(\lambda),$$
$$L(2)=g(\lambda)=g_1(\lambda)/g_2(\lambda),$$

其中

$$\begin{aligned}f_1(\lambda)=&\,200(108918071\lambda^4+1116868080\lambda^3+3050023746\lambda^2+\\&4081605392\lambda+4414011015),\\ f_2(\lambda)=&\,31329(5545233\lambda^3-332432019\lambda^2+5706542835\lambda-20851706225),\end{aligned}$$

而 $g_1(\lambda)$ 是一个 13 次 14 项的多项式， $g_2(\lambda)$ 是一个 12 次 13 项的多项式.

调用 mrealroot,

$$\mathrm{mrealroot}\Big([f_1(\lambda)],[\lambda],\frac{1}{10^{20}},[f_2(\lambda),g_1(\lambda),g_2(\lambda),\det(A),\lambda,\mu]\Big),$$

得到

$$\left[\left[-\frac{504008669592479636837}{737869762948382064640},-\frac{1008017339184959273673}{1475739525896764129280}\right],[-,+,+,-,-,+]\right].$$

$\mu>0$ 表明这是一个非竞争系统. 且满足其他条件，故该系统可以扰出两个小扰动极限环.

但在寻找 30 和 31 类的过程中，却一直没有结果，这让我们产生怀疑：类 30, 31 是否可能不具有两个小扰动极限环？这个问题的解决似乎并不容易.

8.4 具有三个极限环的三维竞争系统

理论上，我们可以设系统具有 (最多)8 个参系数，然后求出前 8 阶的焦点量，再利用 mrealroot 算法，找出该系统小扰动极限环个数的下界. 但事实上，由于中间计算过程极其复杂，当 A 中存在三个参数，求三阶的焦点量时，Maple 就会告诉我们 “ the object is too large”. 除非有更好的算法，要得到三个小扰动极限环的结果似乎是困难的. 但是，利用 Poincaré-Bendixson 定理，我们可以构造一个具有三个极限环 (两个小扰动极限环，一个大范围极限环) 的三维 Lotka-Volterra 竞争系统.

考虑具有如下相互作用矩阵的系统 (8.2)

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & \lambda \\ -\dfrac{3}{5} & -3 & \mu \\ -2 & -\dfrac{11}{10} & -5 \end{pmatrix}.$$

为满足特征值条件，必须有 $\mu=-\dfrac{117}{8}-\dfrac{633}{640}\lambda$. 由变换 $y=Tx$, 即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{5} & 6 & -\dfrac{117}{8}-\dfrac{633}{640}\lambda \\ -2 & -\dfrac{11}{10} & 4 \\ \dfrac{633}{80}-\dfrac{6963}{6400}\lambda & 8-\dfrac{11}{10}\lambda & \dfrac{117}{4}-\dfrac{1287}{320}\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

变换后的系统具有如下线性部分：

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{505}{211} & -\dfrac{20943}{1688}-\dfrac{633}{640}\lambda & 0 \\ \dfrac{5837}{6330} & \dfrac{505}{211} & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

同样，我们可以求得前 2 阶焦点量：

$$L(1)=f(\lambda)=f_1(\lambda)/f_2(\lambda),$$
$$L(2)=g(\lambda)=g_1(\lambda)/g_2(\lambda),$$

其中

$$
\begin{aligned}
f_1(\lambda) &= -63300(5837\lambda+36560)(194341522781\lambda^3+4397246049014\lambda^2+\\
&\qquad 28169289409536\lambda+43772534807040),\\
f_2(\lambda) &= 34070569(5837\lambda+166160)(5837\lambda+554960)^2,\\
g_1(\lambda) &= 42200(c_{13}\lambda^{13}-c_{12}\lambda^{12}-c_{11}\lambda^{11}-c_{10}\lambda^{10}-c_9\lambda^9-c_8\lambda^8+\\
&\qquad c_7\lambda^7+c_6\lambda^6+c_5\lambda^5+c_4\lambda^4-c_3\lambda^3-c_2\lambda^2-c_1\lambda-c_0),\\
g_2(\lambda) &= 6775611033369212957(44521\lambda+558480)^2\\
&\qquad (5837\lambda+94160)(5837\lambda+166160)^3(5837\lambda+554960)^6,
\end{aligned}
$$

其中 c_i 为 $g_1(\lambda)$ 中 λ^i 项的系数，其数字位数见下表：

c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}
78	78	78	76	77	76	75	74	72	72	70	69	66	65

运行程序 mrealroot,

$$\text{mrealroot}([f_1(\lambda)],[\lambda],\frac{1}{10^{20}},[f_2(\lambda),g_1(\lambda),g_2(\lambda),\det(A),\lambda,\mu]),$$

我们得到

$$\left[\left[-\frac{337819463133526326181}{147573952589676412928},-\frac{84454865783381581545}{36893488147419103232}\right],\left[+,-,+,-,-,-\right]\right].$$

这说明 A 是一个满足特征值条件的竞争系统，且 $L(1)=0$ 有一实根使得 $L(2)<0$, 故可以分别扰动 λ 和 μ, 使得该系统具有两个小扰动极限环.

又可以验证

$$R_{12}=1,R_{23}=1,R_{31}=1,R_{13}=-1,R_{21}=-1,R_{32}=-1,$$

$$\text{sign}(R_{ij})=-\text{sign}(R_{ji}),$$

$$p=\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{21}\alpha_{13}\alpha_{32}<0,$$

故该系统属于 Zeeman 分类的 27 类，且有一吸引异宿轨. 而小扰动得到的外面的极限环为稳定的，所以由 Poincaré-Bendixson 定理，存在第三个极限环，且该极限环是不稳定的.

8.5 四维复制动力系统的极限环构造

本节我们利用复制动力系统理论，将一个四维三次的复制方程降维成一个三维的 Lotka-Volterra 竞争系统. 如上节考察的三维系统，发现其属于 Zeeman 分类的第 27 类, 具有三个极限环, 其中的两个由小扰动得到, 另一个由 Poincaré-Bendixson 定理得到. 这样，我们就给出了一个四维系统的极限环构造的例子.

复制方程是一个定义在紧集 S_n 上的三次方程,

$$\dot{x}_i = x_i((AX)_i - X \cdot AX), i = 1, \cdots, n, \tag{8.10}$$

其中 $A = a_{ij}$ 是 $n \times n$ 矩阵，$X = (x_1, \cdots, x_n)$, S_n 是 n 维的单型, 即有 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. 容易知道，单型 S_n 关于复制方程是不变的. 即，如果 $X \in S_n$, 则对于所有的 t, $X(t) \in S_n$.

由下面的定理，我们知道 n 个变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的复制方程等价于 $n-1$ 个变元 $y_1, \cdots, y_{n-1}$ 的 Lotka-Volterra 方程.

定理 8.5.1 *存在从 $\hat{S}_n = \{X \in S_n : x_i > 0, i = 1, \cdots, n\}$ 到 R_+^{n-1} 的可微可逆变换将复制方程*

$$\dot{x}_i = x_i((AX)_i - X \cdot AX), i = 1, \cdots, n$$

的轨道映成 Lotka-Volterra 方程

$$\dot{y}_i = y_i \left(r_i - \sum_{j=1}^{n-1} a'_{ij} y_j \right), \qquad i = 1, \cdots, n-1 \tag{8.11}$$

的轨道，其中，$r_i = a_{in} - a_{nn}$, $a'_{ij} = a_{ij} - a_{nj}$.

证明 定义 $y_n \equiv 1$ ，考虑变换 $y \to x$

$$x_i = \frac{y_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j} \qquad i = 1, \cdots, n$$

它将 $\{y \in R_+^n : y_n = 1\}$ 映满 $\hat{S}_n$. 逆变换为

$$y_i = \frac{y_i}{y_n} = \frac{x_i}{x_n} \qquad i = 1, \cdots, n.$$

现在考虑由 (8.10) 所给出的 n 变元复制方程. 假设 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的最后一行均为零，由复制方程的性质知，这个限制不失一般性. 由复制方程的商法则易知

$$\dot{y}_i = \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^{\cdot} = \left(\frac{x_i}{x_n}\right) \Big[(AX)_i - (AX)_n\Big].$$

因为 $(Ax)_n = 0$ ，所以

$$\dot{y}_i = y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) x_n.$$

作时间变换，可去掉 x_n. 因为 $y_n = 1$ ，所以有

$$\dot{y}_i = y_i \left(a_{in} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} y_j \right),$$

即当 $r_i = a_{in}$ 时的方程 (8.11). 从 (8.11) 到 (8.10) 反方向的证明是相同的.

由该定理, 关于 Lotka-Volterra 方程的结果可以移到复制方程, 反之亦然. 且该定理具体的给出了将一个复制方程化为一个 Lotka-Volterra 方程的变换.

注意到复制方程的表达式完全由 A 惟一确定，我们下面用 A 来表示所考察的复制方程. 我们考察如下的复制动力系统,

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5+\lambda & 3+\lambda \\ \\ \dfrac{2}{5} & 0 & 5+\mu & \dfrac{18}{5}+\mu \\ \\ -1 & \dfrac{29}{10} & 0 & \dfrac{71}{10} \\ \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

由上述定理，该复制方程和下面的三维 Lotka-Volterra 方程具有相同的解的结构

$$\dot{Y} = \mathrm{diag}(Y)\bar{A}(Y-1), \tag{8.12}$$

其中 $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $Y - 1 = (y_1 - 1, y_2 - 1, y_3 - 1)$, $\mathbf{1} = (1,1,1)$ 为系统的惟一正平衡点,

$$\bar{A} = (a'_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & \lambda \\ -\dfrac{3}{5} & -3 & \mu \\ -2 & -\dfrac{1}{10} & -5 \end{pmatrix}.$$

利用 8.2 节的算法，对于该三次 Lotka-Volterra 系统构造出三个极限环，其中变

换矩阵 T 为

$$T=\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{5} & 6 & -39-\dfrac{201}{80}\lambda \\ \\ -2 & -\dfrac{1}{10} & 4 \\ \\ \dfrac{201}{10}-\dfrac{201}{800}\lambda & 8-\dfrac{1}{10}\lambda & 78-\dfrac{39}{40}\lambda \end{pmatrix}.$$

变换后的系统具有分块对角形线性部分 Cy

$$Cy=\begin{pmatrix} -\dfrac{185}{67} & -\dfrac{2457}{67}-\dfrac{201}{80}\lambda & 0 \\ \\ \dfrac{1399}{2010} & \dfrac{185}{67} & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

中心流形 $y_3=h(y_1,y_2)$ 近似到 4 次具有形式：

$$h:=numer/denom,$$

其中

$$\begin{aligned} denom:=\ &13057926408(1399\lambda+21520)(1399\lambda+18370) \\ &(1399\lambda+30520)^3(1399\lambda+79120)^6, \\ numer:=\ &5(\lambda-80)(c_{20}y_1^2+c_{21}y_1y_2+c_{22}y_2^2+c_{30}y_1^3+c_{31}y_1^2y_2+c_{32}y_1y_2^2+ \\ &c_{33}y_2^3+c_{40}y_1^4+c_{41}y_1^3y_2+c_{42}y_1^2y_2^2+c_{43}y_1y_2^3+c_{44}y_2^4), \end{aligned}$$

这里，由于 c_{ij} 的复杂性，我们仅给出二次项系数的表达式：

$$\begin{aligned} c_{20}=\ &3878496(1399\lambda+21520)(1399\lambda+18370)(1399\lambda+30520)^2(1399\lambda+79120)^4 \\ &(36848223227\lambda^2-3728706330974\lambda-8500424967520), \\ c_{21}=\ &-349064640(1399\lambda+21520)(1399\lambda+18370)(1399\lambda+30520)^2 \\ &(1399\lambda+79120)^4(25173215679\lambda^2+281094416450\lambda-830652378400), \\ c_{22}=\ &-4363308(1399\lambda+21520)(1399\lambda+18370)(1399\lambda+30520)^2 \\ &(1399\lambda+79120)^4(118235649797\lambda^3-2249434862354\lambda^2- \\ &112692870322240\lambda-661728019929600), \end{aligned}$$

将算得的 $y_3=h(y_1,y_2)$ 代入系统 (8.12) 前两个方程的右端，得到二维系统. 用我们的 Maple 程序 Liapc 计算得该二维系统的前两个焦点量为

$$LV_1=f(\lambda)=f_1(\lambda)/f_2(\lambda),$$

$$LV_2=g(\lambda)=g_1(\lambda)/g_2(\lambda),$$

其中

$$
\begin{aligned}
f_1(\lambda) = {} & 20100(1399\lambda + 14320)(1713049903\lambda^3 + \\
& 49981817982\lambda^2 + 392558488968\lambda + 497809486720), \\
f_2(\lambda) = {} & 1957201(1399\lambda + 30520)(1399\lambda + 79120)^2, \\
g_1(\lambda) = {} & 67000(449623336959686012906469466298236387500941142615479\lambda^{13} - \\
& 9055362554123626857890807545572637718093601995743562\lambda^{12} - \\
& 4672285093326765591241788592908072876816316540221324312\lambda^{11} - \\
& 268996027093943708263784834066973422552783171859853995264\lambda^{10} - \\
& 4964145537036984845243485359031105211291664382966183226880\lambda^9 + \\
& 116572621770325183574820306193471776261543907042925134233600\lambda^8 + \\
& 9019140758079709590313516170927160636793831028919211261952000\lambda^7 + \\
& 253046506653063221170726592715132464907507053534509462978560000\lambda^6 + \\
& 4261880826495859487164886999949513791382997076664977562009600000\lambda^5 + \\
& 46762024239782875886039693452941146334215419068416603979776000000\lambda^4 + \\
& 333145854857546037191662184703620604684068821512525583482880000000\lambda^3 + \\
& 1450027760178280480229252359420561979821359696351178889625600000000\lambda^2 + \\
& 3304599219676594922550655405353317478534543998644868087808000000000\lambda + \\
& 2516349012898162124142415917860020616167561457593630064640000000000), \\
g_2(\lambda) = {} & 5359059420406999(4489\lambda + 65520)^2(1399\lambda + 21520) \\
& (1399\lambda + 30520)^3(1399\lambda + 79120)^6.
\end{aligned}
$$

调用我们的 Maple 程序 mrealroot, 参数设置如下：

$$
\text{mrealroot}\left([f_1(\lambda)], [\lambda], \frac{1}{10^{20}}, [f_2(\lambda), g_1(\lambda), g_2(\lambda), \det(A), \lambda, \mu]\right),
$$

计算结果为

$$
\left[\left[-\frac{115270809076906035763}{73786976294838206464}, -\frac{230541618153812071525}{147573952589676412928}\right], [+,+,+,-,-,-,]\right].
$$

$\lambda < 0, \mu < 0$ 表明 A 是一个竞争系统； $\det(A) < 0$ 表明 A 满足存在虚特征值的条件；且 LV_1 的这个实根使得 $LV_2 > 0$. 故该系统具有两个小扰动极限环. 容易验证该系统属于 Zeeman 分类的 27, 且有一排斥异宿轨. 而小扰动得到的外面的极限环为不稳定的，所以由 Poincaré-Bendixson 定理，存在第三个极限环，且该极限环是稳定的.

至此，我们构造性地证明了四维三次复制方程至少具有三个极限环.

8.6 三维捕食系统极限环的构造

下面，我们考察具有如下系数矩阵的三维 Lotka-Volterra 系统

$$A=(a_{ij})_{3\times 3}=\begin{pmatrix}-1 & -13 & \lambda\\ 3 & -2 & \mu\\ -5 & 1 & -11\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda>0,\mu<0$. 为了满足特征值条件 $\det(A)=(A_{11}+A_{22}+A_{33})\mathrm{tr}(A)$, 我们需要 $\mu=-\dfrac{45}{4}-\dfrac{63}{52}\lambda$.

这里，变换矩阵 T 为

$$T=\begin{pmatrix}3 & 12 & -\dfrac{45}{4}-\dfrac{63}{52}\lambda\\ -5 & 1 & 3\\ \dfrac{189}{4}+\dfrac{63}{52}\lambda & 39+\lambda & \dfrac{585}{4}+\dfrac{15}{4}\lambda\end{pmatrix}.$$

通过变换，原系统线性部分 Cx 具有如下分块对角形式：

$$Cx=\begin{pmatrix}-\dfrac{94}{21} & -\dfrac{575}{28}-\dfrac{63}{52}\lambda & 0\\ \dfrac{323}{63} & \dfrac{94}{21} & 0\\ 0 & 0 & -14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

中心流形 $x_3=h(x_1,x_2)$ 近似到 4 次是一个关于 x_1,x_2 的 12 项多项式，其系数是 λ 的有理函数. h 具有形式：

$$h:=numer/denom,$$

其中

$$\begin{aligned}denom:=\ & 2352442176(10884540241\lambda^4+1971348619500\lambda^3+\\ & 133889970093750\lambda^2+4041570304687500\lambda+45749199462890625)\\ & (563115447124485257417739187 5\lambda+330111128892116 1123\lambda^7+\\ & 621676361124053382784\lambda^6+4856056633868509055231 7\lambda^5+\\ & 2043198948714629510712726\lambda^4+50166374624555976159254973\lambda^3+\\ & 72098651220463050773202522 0\lambda^2+563115447124485257417739187 5\lambda+\\ & 1847970287598619844395734375 0),\\ numer:=\ & 5(\lambda-80)(c_{20}x_1^2+c_{21}x_1x_2+c_{22}x_2^2+c_{30}x_1^3+c_{31}x_1^2x_2+c_{32}x_1x_2^2+\\ & c_{33}x_2^3+c_{40}x_1^4+c_{41}x_1^3x_2+c_{42}x_1^2x_2^2+c_{43}x_1x_2^3+c_{44}x_2^4).\end{aligned}$$

这里，由于 c_{ij} 的复杂性，我们仅给出二次项系数的表达式：

$$\begin{aligned}
c_{20} = & -115577280(323\lambda+5070)(\lambda+39)(2907\lambda+50089)(50390907\lambda^2- \\
& 727166024\lambda+49045232613)(323\lambda+6981)^2(323\lambda+14625)^4, \\
c_{21} = & \ 693463680(323\lambda+5070)(\lambda+39)(2907\lambda+50089)(72367827\lambda^2+ \\
& 605325292\lambda-6232817175)(323\lambda+6981)^2(323\lambda+14625)^4, \\
c_{22} = & \ 20003760(323\lambda+5070)(\lambda+39)(2907\lambda+50089)(68799969\lambda^3+ \\
& 2363652291\lambda^2+68455237175\lambda+ \\
& 946381093125)(323\lambda+6981)^2(323\lambda+14625)^4.
\end{aligned}$$

用我们的 Maple 程序 Liapc 计算得其前两个焦点量为

$$\begin{aligned}
LV_1 &= f(\lambda) = f_1(\lambda)/f_2(\lambda), \\
LV_2 &= g(\lambda) = g_1(\lambda)/g_2(\lambda),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda) = & \ 315(323\lambda+4433)(4722291\lambda^3+69840875\lambda^2-746295719\lambda-1343990583), \\
f_2(\lambda) = & \ 104329(323\lambda+6981)(323\lambda+14625)^2, \\
g_1(\lambda) = & -9(12147448548546723166435233660592483395957\lambda^{13}+ \\
& 144498088388154438397093706884303034217210 9\lambda^{12}+ \\
& 3822672903970069094596516405609010491257440 46\lambda^{11}+ \\
& 53604666285409297736389542009177619545603174678\lambda^{10}+ \\
& 3897412457592976447257943869362140760257628793551\lambda^9+ \\
& 168853212366164820252749832893332829886151940119071\lambda^8+ \\
& 4627657137492495240164981244068601447853753876569812\lambda^7+ \\
& 79971939267897013568561875995762700474152136689735844\lambda^6+ \\
& 790644477609263096295991279284826634858577981884611843\lambda^5+ \\
& 2417993271401960048155568337235935208597747780709646459\lambda^4- \\
& 36357201433756976353022014142304540609834332651824343778\lambda^3- \\
& 449790162464205264620724620001226163424409908831094751130\lambda^2- \\
& 1837157517934093423430379334862656235533243412229761094375\lambda- \\
& 2018290114104935477001548491450207495291764580743900234375), \\
g_2(\lambda) = & \ 7031412995686(2907\lambda+50089)(441\lambda+7475)^2 \\
& (323\lambda+6981)^3(323\lambda+14625)^6.
\end{aligned}$$

调用我们的 Maple 程序 mrealroot, 参数设置如下：

$$\mathrm{mrealroot}([f_1(\lambda)],[\lambda],\frac{1}{10^{20}},[f_2(\lambda),g_1(\lambda),g_2(\lambda),\det(A),\lambda,\mu]),$$

计算结果为

$$\left[\left[-\frac{6138498964895245124 11}{7378697629483820646 4},-\frac{1227699792979049024823}{147573952589676412928}\right],[+,-,+,-,+,-,]\right].$$

$\lambda > 0, \mu < 0$ 表明 A 为一个顺环捕食系统； $\det(A) < 0$ 表明 A 满足存在虚特征值的条件；且 LV_1 的这个实根使得 $LV_2 < 0$. 故该系统具有两个小扰动极限环.

至此，我们构造出具有两个小扰动极限环的三种群 Lotka-Volterra 顺环捕食系统.

注　释

本章中, 高维 Lotka-Volterra 系统极限环的存在性由 Coste, Peyraud, Coullet [17] 和 Hofbauer [30] 利用 Hopf 分支定理解决. Zeeman 对三维 Lotka-Volterra 竞争系统的分类参阅 [75, 76]. Hofbauer 和 So 构造的具有两个极限环的三维 Lotka-Volterra 竞争系统参阅 [31]. Hirsch 降维定理参阅 [29], 中心流形定理等参阅 Carr J 的著作 [8]. 三维系统极限环的构造中的系统分别取自 [49, 50].

参 考 文 献

[1] Andronov A, Leontovich E, Gordon I and Naier A. Theory of Bifurcation of Dynamic Systems on a Plane. New York: Wiley, 1973

[2] Buchberger B, Collins G, Loos R and Albrecht R. Computer Algebra Symbolic and Algebraic Computation. New York: Springer-Verlag, 1983

[3] Caviness B F and J R Johnson. Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition. New York: Springer-Verlag

[4] Cairó L, Chavarriga J, Giné J and Llibre J. A class of reversible cubic systems with an isochronous center. Computers Math Appl, 1989, 39∼53

[5] Char B W, Geddes K O, Gonnet G. H. et al. Maple V-Language Reference Manual. New York: Springer-Verlag, 1991

[6] Chen L, Lu Z, Wang D. A class of cubic systems with two centers or two foci, J Math Anal Appl, 2000, 242: 154∼163

[7] Chicone C and Jacobs M. Bifurcation of critical periods for plane vector fields. Trans Amer Math Soc, 1989, 433∼486

[8] Carr J. Applications of Center Manifold Theory. New York: Springer-Verlag, 1981

[9] Char B W, Geddes K O, Gonnet G. H. et al. Maple V-Language Reference Manual. New York: Springer, 1991

[10] Chavarriga J, Giné J, Garcia I. Isochronous centers of cubic systems with degenerate infinity. Diff Eqns Dyna Syst, 1999, 221∼238

[11] Christopher C and Lloyd N G. On the paper of Jin and Wang concerning the conditions for a centre in certain cubic systems. Bull. London Math Soc, 1990, 22:5∼12

[12] Christopher C and Devlin J. Isochronous centers in planar polynomial systems. SIAM J Math Anal, 1997. 162∼177

[13] Christopher C. and Lynch S. Small-amplitude limit cycles bifurcation for Liénard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces. Nonlinearity, 1999,12: 1099∼1112

[14] Coleman C S. Hilbert's 16th problem: How many cycles? In: *Differential Equation Models* (Edited by M. Braun et al). Springer-Verlag, 1982. 279∼297

[15] Collins G E. Quantifier Elimination by Cylindtical Algebraic Decomposition-Twenty Years of Progress. Quantifier Elimination and Cylindtical Algebraic Decomposition(Caviness, Johnson, eds). New York: Springer-Verlag, 1998, 8∼23

[16] Coppel W A. Some quadratic systems with at most one limit cycle. *Dynamics Reported*, Vol. 2, 61∼68, New York: Wiley, 1988

[17] Coste J, Peyraud J and Coullet P. Asymptotic behaviour in the dynamics of com-

peting species. SIAM J Appl Math, 1979,36: 516∼542

[18] Cox D, Little J, Oshea D. Ideals, varieties and algorithms. 2nd ed. New York, Berlin: Springer-Verlag, 1996

[19] Cox D, Little J and O‘Shea D. Applying algebraic geometry. New York, Berlin: Springer-Verlag, 1996

[20] Cox D. Introduction to Gröbner bases, Applications of Computational Algebraic Geometry (Cox, Sturmfels, eds)1∼24. Proc Symp Appl Math, Amer Math Soc, 1998

[21] Devlin J, Lloyd N G and Pearson J M. Cubic systems and Abel Equations. J Diff Eqns, 1998, 147: 435∼454

[22] Davenpot J H, Siret Y and Tournier E. Computer Algebra. New York: Academia Press, 1988

[23] Dumortier F and Li C. On the uniquenness of limit cycles surrounding one or more singularities for Liénard Equations. *Nonlinearity*, 1996, 9 : 1489∼1500

[24] Dumortier F and Li C. Quadratic Liénard Equations with quadratic damping. *J Differential Equations*, 1997, 139: 41∼59

[25] Feng G and Zhang S. Reducing the multivariate polynomial system to eigentvalue problem. In: Proc Int Workshop Math Mech(Wu, Cheng eds). Beijing: Int Academic Publ., 1992, 19∼27

[26] Gasull A and Torregrosa J. Small-amplitude limit cycles in Liénard Systems via Multiplicity. *Journal of Differential Equations*, 1999, 159: 186∼211

[27] Glendinning P, Stability, Instability and Chaos. An introduction to the theory of nonlinear differential equations. Cambridge University Press, 1994

[28] Goh B S. Management and analysis of Biological populations. Elsevier Sci Pub Com, 1980

[29] Hirsch M. Systems of differential equations which are competitive or cooperative: III. Competing species, Nonlinearity, 1998, 1: 51∼71

[30] Hofbauer J. On the occurrence of limit cycles in the Volterra-Lotka Equation. Nonlinear Analysis, 1981, 5: 1003∼1007

[31] Hofbauer J, So J. Multiple limit cycles for three dimensional Lotka-Volterra equations. Appl Math Lett, 1994, 7: 65∼70

[32] Hofbauer J, Sigmund K. Evolutionary Games and Population Dynamics. Cambridge University Press, 1998

[33] Hirsch M W. Systems of differential equations which are competitive or cooperative: III. Competing Species, Nonlinearity, 1988, 1: 51∼71

[34] James E M and Lloyd N G. A cubic system with eight small-amplitude limit cycles. IMA J Appl Math, 1991, 47: 163∼171

[35] Jin X F and Wang D M. On the conditions of Kukles for the existence of a centre.

Bull London Math Soc, 1990, 22: 1～4

[36] Johnson J R. Algorithm for polynomial real root isolation. Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition (Caviness, Johnson, eds). New York: Springer, 1998, 269～299

[37] Kukles I S. Sur quelques cas de distinction entre un foyer et un centre. Dokl Akad Nauk SSSR, 1994, 42: 208～211

[38] Li C. Two problems of planar quadratic systems. Scientia Sinica (Series A), 1983, 26: 471～481

[39] Li T Y, Sauer T and Yorke J A. Numerixally determining solutions of systems of polynomial equations. Bull Amer Math Soc, 1988, 18: 173～177

[40] Liénard, A. Étude des oscillations entretenues, Revue Génerale de l'Électricité, 1928, 23: 901～912, 946～954

[41] Lins A, de Melo W and C C Pugh. On Liénard's equation. *Lecture Notes in Math*, 1997, 597: 335～357

[42] Lloyd N G and Lynch S. Small-amplitude Limit Cycles of Certain Liénard Systems. *Proc Roy Soc Lond Ser*, 1988, A 418: 199～208

[43] Lloyd N G and J M Person. Limit cycles of cubic kolmogorov systems. *Appl Math Lett*, 1995, Vol 9, No.1: 15～18

[44] Lu G and Lu Z. Global stability for n-species Lotka-Volterra systems with delay, III: Necessity, J Biomath, 2000, 15: 81～87

[45] Lu Z. Computer aided proof for global stability of Lotka-Volterra systems. Computer Math Appl, 1996, 31: 49～59

[46] Lu Z. An extension of Kamake theorem and periodic Lotka-Volterra systems with diffusions, Appl Anal, 2001

[47] Lu Z, He B, Luo Y and Pan L. An algorithm of real root isolation for polynomial systems, M M Research Preprints, 2001, No. 20: 187～198

[48] Lu Z, He B, Luo Y and Pan L. The construction of small amptitude limit cycles for differential polynomial systems. Preprint, 2000

[49] Lu Z Y and Luo Y. Two limit cycles in three dimensional Lotka-Volterra systems. Computer Math Appl, 2002, 44: 51～66

[50] Lu Z Y and Luo Y. Three Limit Cycles for a Three Dimensional Lotka-Volterra Competitive System with a Heteroclinic Cycle. Computer Math Appl, 2003, 46: 231～238

[51] Lu Z and Ma S L. Center, Focus and Limit Cycle Problems for Polynomial Differential Systems (Gao, Wang Eds). Academic Press, 2000

[52] Lu Z and Wang G. The Positive definiteness of a class of polynomials from the global stability analysis of Lotka-Volterra systems. Computer Math Appl, 1999, 38: 19～27

[53] Lu Z and Takeuchi Y. Permanence and global stability for cooperative Lotka-Volterra diffusion systems, Nonl Anal, 1992, 19: 963∼975

[54] Lyncn S. Generalized Cubic Liénard Equations. Appl Math Lett, 1999, 12: 1∼6

[55] Ma S, Ning S and Kwek K H et al. A cubic system with eight small-amplitude limit cycles. Appl Math Lett, 1994, 7: 23∼27

[56] Ma S and Ning S. Deriving some new conditions on the existence of eight limit cycles for a cubic system. Comp Math Appl, 1997,33:59∼84

[57] Ritt J F. Differential Algebra. New York: Amer Math Soc, 1950

[58] Sadovskii A P. On the limiting cycles of a cubic system describing nonlinear oscillations. Differentsial'naya Uraneniya, 1993, 29: 22∼231

[59] Seigel C K and J K Moser. Lectures in Celestial Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1971

[60] Selgrade J F. Asymptotic behavior of solutions to single loop positive feedback systems, J Diff Eqns, 1980, 38: 80∼103

[61] Smith H L. Systems of ordinary differential equations which generate an order preserving flow. A survey of results, SIAM Review, 1998, 30:87∼113

[62] Smale S. The fundamental theorem on algebra and complexity theory. Bulletin AMS, 1981, 41∼36

[63] Sturmfels B. Introduction to Resultant, Applications of Computational Algebraic Geometry (Cox, Sturmfels, eds)25∼40, Proc Symp Appl Math, Amer Math Soc, 1998

[64] Takeuchi and Lu Z. Permanence and global stability for competitive Lotka-Volterra diffusion systems, Nonl Anal TMA, 1995, 24: 91∼104

[65] Van Den Driessche P and Zeeman L. Three-dimensional competitive Lotka-Volterra systems with no periodic orbits, SIAM J Appl Math, 1998, 58: 227∼234

[66] Van der Pol, B. On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom. Phil Mag(6), 1922, 43: 700∼719

[67] Wang D. A Program for computing the Liapunov functions and Liapunov constants in Scratchpad II, ACM SIGSAM Bull, 1989, 23: 25∼31

[68] Wang D. A class of cubic differential systems with 6-tuple focus. J Diff Eqns, 1990, 87: 305∼315

[69] Wang D. Mechanical manipulation for a class of differential system. J Symb Comp, 1991, 12: 233∼254

[70] Wilkinson J. The evaluation of zeros of ill-conditioned polynomials, Num Math, 1959, 1:150∼180

[71] Wu W T. On the decision problem and the mechanization of theorem proving in elementary geometry. Sci Sinica, 1978, 21:150∼172

[72] Wu W T. Basic principles of mechanical theorem proving in elementary geometries.

J Automated Reasoning, 1986, 2: 221～252

[73] Wu W T. Mechanical Theorem Proving in Geometries: Basic Principle. New York: Springer-Verlag, 1994

[74] Xiao D, Li W. Limit cycles for the competitive three dimensional Lotka-Volterra system. J Diff Eqns, 2000, 164:1～15

[75] Zeeman L. Hopf bifurcations in competitive three dimensional Lotka-Volterra systems, Dynam Stability Systems, 1993, 8: 189～217

[76] Zeeman L. Extinction in competitive Lotka-Volterra systems. Proc Amer Math Soc, 1993, 123: 87～96

[77] Zhang W, Hou X and Zeng Z. Weak centers and bifurcation of critical periods in reversible cubic systems. Computers Math Appl, 2000. 771～782